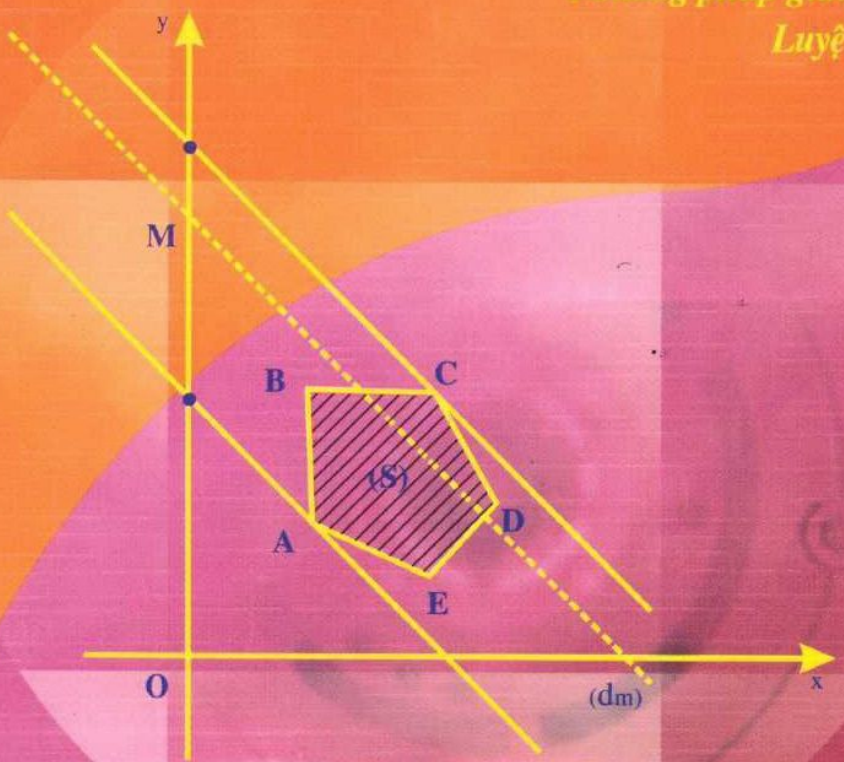
GS. TS TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)
NGUYỄN DUY HIẾU - TRẦN ĐỨC HUYÊN

HỌC TỐT
ĐẠI SỐ 10

(CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN VÀ NÂNG CAO)

Tóm tắt giáo khoa
Phương pháp giải toán
Luyện tập



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GS. TS Trần Văn Hạo (*chủ biên*)
Nguyễn Duy Hiếu – Trần Đức Huyên

HỌC TỐT ĐẠI SỐ 10

(Chương trình chuẩn và nâng cao)

- Tóm tắt giáo khoa.
- Phương pháp giải toán.
- Luyện tập.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HỌC TỐT ĐẠI SỐ 10
(CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN VÀ NÂNG CAO)

GS.TS Trần Văn Hạo (Cb) - Nguyễn Duy Hiếu - Trần Đức Huyên

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: (04)9724852 (04)9724770 Fax: (04)9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:

Biên tập : NGUYỄN THỊ NGỌC HÂN

Sửa bản in: TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY SÁCH - TBGD ĐỨC TRÍ

SÁCH LIÊN KẾT

Mã số: 1L - 322ĐH2008

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Trung tâm Mỹ thuật ứng dụng

Số xuất bản: 573-2008/CXB/26-100/ĐHQGHN, ngày 27/06/2008

Quyết định xuất bản số: 322 LK/XB ngày 04/7/2008

In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2008.

LỜI NÓI ĐẦU

Mấy năm nay bộ sách HỌC TỐT TOÁN 6 – TOÁN 9 đã được bạn đọc đón nhận một cách tích cực, góp phần vào việc dạy và học toán ở bậc trung học cơ sở. Vì vậy, chúng tôi tổ chức viết hai cuốn sách HỌC TỐT ĐẠI SỐ 10 và HỌC TỐT HÌNH HỌC 10, nhất là trong thực tế phân ban hiện nay.

Sau phần tóm tắt giáo khoa nêu lên những kiến thức cần nắm vững, nội dung chủ yếu của cuốn sách là phần phương pháp giải toán. Các tác giả đã hệ thống và phân loại các vấn đề, có nêu vắn tắt phương pháp giải quyết vấn đề đó và các ví dụ minh họa cho phương pháp này.

Cũng như các cuốn sách HỌC TỐT TOÁN 6 – TOÁN 9, phần luyện tập gồm các bài toán để học sinh tự giải mà không có hướng dẫn và đáp số.

Hy vọng rằng cuốn sách sẽ giúp ích cho việc dạy, học của thầy và trò, đặc biệt là giúp cho việc tự học của các em học sinh được tốt hơn.

Tác giả

Chương I: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ VÀ ÁP DỤNG

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Mệnh đề

1. Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai. Mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

2. Mệnh đề phủ định của mệnh đề P được kí hiệu là $\overline{P}$ và đọc là "không P". Mệnh đề $\overline{P}$ đúng khi P sai, còn $\overline{P}$ sai khi P đúng.

3. Mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai. Cách đọc mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "P kéo theo Q" hoặc "nếu P thì Q".

4. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

5. Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ đúng nếu cả P và Q đều đúng hoặc nếu cả P và Q đều sai. Cách đọc là "P khi và chỉ khi Q".

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

II. Mệnh đề chứa biến

6. Những câu như: "m là một số chẵn" với m là một số nguyên, hay "x + y = 5" với x, y là những số thực là những mệnh đề chứa biến. Câu thứ nhất chứa một biến m thuộc tập Z, câu thứ hai chứa hai biến $x, y \in \mathbb{R}$

7. Khi cho biến m trong câu "m là một số chẵn" một giá trị nguyên cụ thể, ta được một mệnh đề. Chẳng hạn, với m = 6 ta được mệnh đề "6 là một số chẵn" là một mệnh đề đúng, còn nếu cho m = 7 ta được mệnh đề "7 là một số chẵn" là mệnh đề sai.

Kí hiệu mệnh đề chứa bến là P(m), Q(x, y),...

8. Kí hiệu $\forall$ (với mọi)

Cho mệnh đề chứa biến P(x) với x thuộc tập X. Nếu khi thay x bởi một phần tử tùy ý $x_0 \in X$ ta đều có $P(x_0)$ đúng thì ta được mệnh đề đúng sau: "với mọi x thuộc X, P(x) đúng". Mệnh đề này được kí hiệu là: "$\forall x \in X, P(x)$".

Ví dụ: Mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$" là một mệnh đề sai, vì có $x = 0$ không thỏa mãn $0^2 > 0$

9. Kí hiệu $\exists$ (tồn tại)

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Câu "Tồn tại x thuộc X để $P(x)$ đúng" là một mệnh đề, kí hiệu là "$\exists x \in X, P(x)$" hoặc "$\exists x \in X: P(x)$"

Ví dụ: Cho mệnh đề chứa biến "$x^2 + 4 = 5$", $x \in Z$. Lúc đó mệnh đề "$\exists x \in Z: x^2 + 4 = 5$" là một mệnh đề đúng.

10. Phủ định của mệnh đề có chứa các kí hiệu $\forall$, $\exists$.

Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X: P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X: \overline{P(x)}$"

Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in X: P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X: \overline{P(x)}$"

III. Định lí

11. Trong định lí toán học dạng $P \Rightarrow Q$ ta nói:

P là giả thuyết, Q là kết luận của định lí;

P là điều kiện đủ để có Q;

Q là điều kiện cần để có P.

12. Định lí $Q \Rightarrow P$ được gọi là định lí đảo của định lí $P \Rightarrow Q$.

13. Nếu $P \Leftrightarrow Q$ ta nói: P là điều kiện cần và đủ để có Q.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Xác định câu nào là mệnh đề và câu **nào không** phải là mệnh đề.

Phương pháp: Để xét xem một câu có phải là một mệnh đề không, ta cần xem có thể khẳng định được phát biểu trong câu đó là đúng hay sai không. Nếu khẳng định đúng, ta được một mệnh đề và là mệnh đề đúng; nếu khẳng định sai, ta cũng được một mệnh đề và là mệnh đề sai.

Ví dụ 1: Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề?

a) 19 là một số nguyên tố;

b) Các bạn hãy vui lên nào!

c) $\sqrt{4} = -2$;

d) Tam giác ABC là một tam giác cân

Giải

a) Là một mệnh đề và là mệnh đề đúng, vì 19 đúng là một số nguyên tố.

b) Ta không khẳng định được câu b là đúng hay là sai, nên câu b phải là một mệnh đề.

c) Là một mệnh đề và là mệnh đề sai.

d) Không phải là một mệnh đề vì ta chưa biết tam giác ABC là tam giác cụ thể nào, do đó không thể khẳng định là đúng hay sai.

Ghi chú: Câu d là một mệnh đề chứa biến (biến là tam giác ABC). Khi cho một tam giác ABC cụ thể (chẳng hạn cho độ dài ba cạnh) ta sẽ khẳng định được câu đó đúng hay sai, do đó sẽ là một mệnh đề.

VẤN ĐỀ 2: Phát biểu phủ định của một mệnh đề

Phương pháp: Để phát biểu phủ định của một mệnh đề, về nguyên tắc ta thêm từ "không" vào trước vị từ trong mệnh đề đã cho. Trong câu tiếng Việt, để nhấn mạnh, đôi khi ta thêm từ "không phải" trước vị từ "là".

Ví dụ 2: Phát biểu phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai:

a) $x = -1$ là một nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = 0;$$

b) Các điểm nằm trên đường phân giác của một góc cách đều hai cạnh của góc đó.

c) 144 là một số chính phương

d) Phương trình $x^2 + 7x - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu

Giải

a) $x = -1$ không phải là một nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = 0$.

Đây là một mệnh đề đúng vì $x = -1$ làm cho mẫu số triệt tiêu.

b) Các điểm nằm trên đường phân giác của một góc không cách đều hai cạnh của góc đó. Đây là một mệnh đề sai.

c) 144 không phải là một số chính phương. Đây là mệnh đề sai vì $144 = 12^2$

d) Phương trình $x^2 + 7x - 3 = 0$ không có hai nghiệm trái dấu. Đây là mệnh đề sai, vì phương trình bậc hai đã cho có $\frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3 < 0$

VẤN ĐỀ 3: Lập mệnh đề kéo theo từ các mệnh đề đã cho và xét tính đúng sai của nó.

Phương pháp: Khi các mệnh đề P và Q được viết bằng lời thì mệnh đề kéo theo có dạng "Nếu P thì Q", còn nếu P và Q được viết dưới dạng các kí hiệu toán học thì là chỉ cần viết $P \Rightarrow Q$.

Ví dụ 3: Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề này với:

a) P = "$-4 < -3$", Q = "$(-4)^2 < (-3)^2$";

b) P = "Tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$", Q = "Tam giác ABC có trung tuyến AM bằng $\frac{1}{2}$BC";

c) P = "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2", Q = "$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$".

d) P = "Tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc", Q = "ABCD là hình thoi".

Giải

a) $(-4 < -3) \Rightarrow ((-4)^2 < (-3)^2)$. Đây là mệnh đề sai vì P đúng, Q sai.

b) Nếu tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$ thì tam giác ABC có trung tuyến AM = $\frac{1}{2}$BC. Đây là một mệnh đề đúng vì trong một tam giác vuông đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền.

c) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Đây là mệnh đề đúng theo định lí vi-ét.

d) Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc thì tứ giác ABCD là hình thoi. Đây là một mệnh đề đúng.

VẤN ĐỀ 4: Lập các mệnh đề từ mệnh đề chứa biến. Phủ định của các mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall$, $\exists$.

Phương pháp: Đối với các mệnh đề chứa biến P(x), Q(x, y),... khi thay các giá trị cho các biến x, y,... ta sẽ được các mệnh đề. Phủ định của mệnh đề $\forall x \in X$: P(x) là mệnh đề $\exists x \in X$: $\overline{P(x)}$, còn phủ định của mệnh đề $\exists x \in X$: P(x) là mệnh đề $\forall x \in X$: $\overline{P(x)}$, trong đó $\overline{P(x)}$ là phủ định của P(x).

Ví dụ 4.1: Cho các mệnh đề chứa biến

P(x) = "$3x^2 - 7x + 2 > 0$", với $x \in \mathbb{R}$.

Q(x, y) = "$y^2 + 2y < x^2 - 3x + 5$", với $x, y \in \mathbb{R}$.

Xét xem các mệnh đề P(2), P(3), Q(2, –1), Q(1,1) đúng hay sai.

Giải

Ta có: P(2) = "$3.4 - 7.2 + 2 > 0$" là mệnh đề sai,

P(3) = "$3.9 - 7.3 + 2 > 0$" là mệnh đề đúng,

Q(2, –1) = "$8 < 9$" là mệnh đề đúng,

Q(1,1) = "$3 < 3$" là mệnh đề sai.

Ví dụ 4.2: Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $2^n - 1$ là số nguyên tố;

b) $\exists m \in \mathbb{Z}$: $3m + 1$ chia hết cho 15;

c) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^4 - 3x^2 + 5 > 0$;

d) $\exists x \in \mathbb{R}$: $2x^3 + 2x^2 + x + 1 < 0$.

Giải

a) Phủ định của mệnh đề đã cho là mệnh đề $\exists n \in \mathbb{N}^*$: $2^n - 1$ không phải là số nguyên tố.

b) Phủ định là mệnh đề

$\forall m \in \mathbb{Z}$: $3m + 1$ không chia hết cho 15.

c) Phủ định là mệnh đề

$\exists x \in \mathbb{R}$: $x^4 - 3x^2 + 5 \leq 0$

d) Phủ định là mệnh đề

$\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^3 + 2x^2 + x + 1 \geq 0$

VẤN ĐỀ 5: Xét tính đúng, sai của mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall$, $\exists$.

Phương pháp: Để chứng minh một mệnh đề dạng $\exists x \in X$: P(x) là đúng, ta chỉ cần chỉ ra một phần tử $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng, còn muốn chứng minh mệnh đề đó sai, ta cần chứng minh rằng với mọi $a \in X$ tùy ý ta có P(a) sai.

Ngược lại, muốn chứng minh mệnh đề dạng $\forall x \in X$: P(x) là đúng, ta cần chứng minh rằng với mọi $a \in X$ ta đều có P(a) đúng; còn muốn chứng minh mệnh đề này sai, ta chỉ cần tìm được một phần tử $x_0 \in X$ để $P(x_0)$ sai.

Ví dụ 5: Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của chúng:

a) $\exists x \in \mathbb{R}$: $2x^2 + 4x + 5 < 0$;

b) $\forall m \in \mathbb{Z}$: $2m(2m + 2)$ chia hết cho 8;

c) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 6 \geq 0$;

d) $\exists n \in \mathbb{N}^*$: $2n - 1$ là số nguyên tố.

Giải

a) Mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}$: $2x^2 + 4x + 5 < 0$ sai. Thật vậy, ta có:

$$2x^2 + 4x + 5 = (2x^2 + 4x + 2) + 3$$
$$= 2(x + 1)^2 + 3$$

Vì với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $(x + 1)^2 \geq 0$ nên $2(x + 1)^2 + 3 > 0$, với mọi số thực x.

Phủ định của mệnh đề đã cho là

$\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$

b) $\forall m \in \mathbb{Z}$: $2m(2m + 2)$ chia hết cho 8 là một mệnh đề đúng. Thật vậy, ta có:

$$2m(2m + 2) = 4m(m + 1).$$

Trong hai số liên tiếp m và m + 1 phải có một số chẵn và một số lẻ. Giả sử $m = 2k$ là số chẵn, thế thì

$$2m(2m + 2) = 8k(2k + 1) \text{ chia hết cho } 8.$$

Phủ định của mệnh đề này là

$\exists m \in \mathbb{Z}$: $2m(2m + 2)$ không chia hết cho 8

c) Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 6 \geq 0$ đúng, vì ta có:

$$x^2 - 4x + 6 = (x^2 - 4x + 4) + 2$$
$$= (x - 2)^2 + 2$$

Vì $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi số thực x nên ta có $(x - 2)^2 + 2 \geq 2 \geq 0$ đúng với mọi số thực x.

Phủ định của mệnh đề này là

$\exists x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 6 < 0$

Chú ý: Phủ định của mệnh đề $a > b$ là mệnh đề $a \leq b$, còn phủ định của mệnh đề $a \geq b$ là $a < b$.

d) $\exists n \in \mathbb{N}^*$: $2n - 1$ là số nguyên tố là một mệnh đề đúng, vì với $n = 3$ ta có $2.3 - 1 = 5$ là một số nguyên tố. Phủ định của mệnh đề này là

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $2n - 1$ không phải là số nguyên tố.

VẤN ĐỀ 6: Sử dụng các thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ", "điều kiện cần và đủ" để phát biểu các định lí.

Phương pháp: Một định lí thường có dạng "Nếu P thì Q", nghĩa là mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$. Theo định nghĩa P là điều kiện đủ để có Q, còn Q là điều kiện cần để có P. Nếu định lí có dạng $P \Leftrightarrow Q$ thì P là điều kiện cần và đủ để có Q, Q cũng là điều kiện cần và đủ để có P.

Ví dụ 6: Cho định lí:

Nếu một tứ giác lồi có hai đường chéo vuông góc thì tổng bình phương của các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

a) Nêu giả thiết và kết luận của định lí

b) Sử dụng các thuật ngữ "điều kiện cần" hoặc "điều kiện đủ" để phát biểu lại định lí trên.

c) Phát biểu mệnh đề đảo của định lí trên. Mệnh đề đảo có đúng không?

Giải

a) Giả thiết: Một tứ giác lồi có hai đường chéo vuông góc

Kết luận: Tổng bình phương của các cặp cạnh đối diện của tứ giác bằng nhau.

Thông thường nếu phát biểu định lí bằng lời như thế này thì

khó chứng minh. Vì vậy người ta hay phát biểu một cách cụ thể hơn như sau:

Cho tứ giác lồi ABCD. Nếu AC vuông góc với BD thì $AB^2 + CID^2 = AD^2 + BC^2$. Lúc đó ta có giả thiết và kết luận của định lí là:

Giả thiết: Tứ giác lồi ABCD có AC vuông góc với BD

Kết luận: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

b) Điều kiện đủ để một tứ giác lồi có tổng bình phương của các cặp cạnh đối diện bằng nhau là tứ giác đó có hai đường chéo vuông góc.

Điều kiện cần để một tứ giác lồi có hai đường chéo vuông góc là tứ giác đó có tổng bình phương các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

c) Mệnh đề đảo của định lí trên là: "Một tứ giác lồi có tổng bình phương các cặp cạnh đối diện bằng nhau thì có hai đường chéo vuông góc".

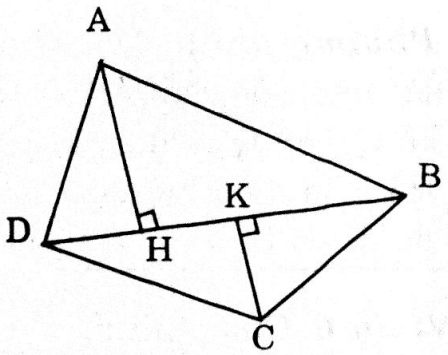
Mệnh đề đảo có thể phát biểu như sau:

"Nếu tứ giác lồi ABCD có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ thì $AC \perp BD$"

Mệnh đề này cũng đúng. Có thể chứng minh như sau

Giả thiết: $\begin{cases} \text{ABCD lồi} \\ AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \end{cases}$

Kết luận: $AC \perp BD$



Kẽ đường cao AH của tam giác ADB và đường cao CK của tam giác CDB.

Ta chứng minh H trùng với K thì AHC thẳng hàng và $AC \perp BID$. Chứng minh bằng phản chứng. Nếu H không trùng với K thì giả sử H nằm giữa D và K.

Ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2$, $AD^2 = AH^2 + DH^2$

$CD^2 = CK^2 + DK^2$, $BC^2 = CK^2 + KB^2$

Từ giả thiết $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ suy ra

$$AH^2 + HB^2 + CK^2 + DK^2 = AH^2 + DH^2 + CK^2 + KB^2$$

Hay $$HB^2 + DK^2 = DH^2 + KB^2 \qquad (1)$$

Vì H nằm giữa hai điểm D và K nên ta có DK > DH và HB > KIB, nghĩa là vế trái của (1) lớn hơn vế phải của (1): vô lí.

Vậy H phải trùng với K và AC ⊥ BD

Ghi chú: Bạn đọc có thể xem xét thêm có xảy ra khả năng H trùng với D hoặc K trùng với B không?

Nhận xét: Trong bài này ta thấy cả hai mệnh đề P ⇒ Q và Q ⇒ P đều đúng nên P ⇔ Q. Vậy ta có định lí.

Điều kiện cần và đủ để tứ giác lồi có hai đường chéo vuông góc là tổng bình phương các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

C/ LUYỆN TẬP

1.1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề?

a) Hôm nay bạn có khỏe không?

b) Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam;

c) $\sqrt{3}$ là một số hữu tỉ;

d) Phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0$ có nghiệm;

1.2. Phát biểu phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai

a) Tam giác có hai đường cao bằng nhau là một tam giác cân.

b) Một tứ giác lồi có các cạnh đối bằng nhau là một hình bình hành.

c) $x = -2$ là một nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x+6} = x$$

d) Ước số chung lớn nhất của hai số 48 và 72 là 8.

1.3. Lập mệnh đề P ⇒ Q và xét tính đúng, sai của mệnh đề này trong các trường hợp:

a) P = "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2"

Q = "$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$"

b) P = "Tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn",

Q = "$\hat{A} + \hat{C} = 180^0$".

c) P = "Tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{C} = 180^0$",

Q = "Tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn".

d) P = "Tứ giác ABCD là hình thang cân",

Q = "Tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau".

1.4. Cho mệnh đề chứa biến

$P(n)$ = "$2^{4n} - 1$ chia hết cho 15", với $n \in \mathbb{N}$.

a) Xét xem các mệnh đề P(2), P(3), P(4) đúng hay sai?

b) Lập mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}$: $2^{4n} - 1$ chia hết cho 15.

Mệnh đề này đúng hay sai?

1.5. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của nó.

a) $\exists x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 2x = -2$;

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n(n + 1)(n + 2)$ chia hết cho 6;

c) $\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 - 5x + 2 > 0$;

d) $\exists n \in \mathbb{N}$: $n^2 + 4n + 5$ chia hết cho 8.

1.6. Lập mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề này trong các trường hợp sau:

a) Cho m, n là hai số nguyên,

P = "m và n đều chia hết cho 3",

Q = "$m^2 + n^2$ chia hết cho 3".

b) P = "Tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$",

Q = "ABC là tam giác vuông".

c) P = "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu",

Q = "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có $ac < 0$".

d) P = "Tứ giác ABCD là hình thoi",

Q = "Tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".

1.7. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của nó.

a) $\forall m \in \mathbb{Z}$: $m^2 - m$ chia hết cho 2;

b) $\exists x \in \mathbb{R}$: $4x^2 - 7x - 1 = 0$;

c) $\exists n \in \mathbb{N}^*$: $n^2 + 2$ chia hết cho $n + 1$;

d) $\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 - 12x + 18 \neq 0$.

1.8. Phát biểu mệnh đề đảo của mỗi định lí sau và xét xem mệnh đề đảo đó đúng hay sai.

a) Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.

b) Một hình thang cân thì có hai đường chéo bằng nhau.

c) Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm bằng -1 và nghiệm kia bằng $-\frac{c}{a}$.

d) Cho hai số nguyên m và n. Nếu $m + n$ chia hết cho 6 thì $m^3 + n^3$ chia hết cho 6.

1.9. Phát biểu các mệnh đề trong bài 1.8, sử dụng các khái niệm "điều kiện cần" hoặc "điều kiện đủ".

1.10. Phát biểu mỗi mệnh đề sau, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" và xét xem các mệnh đề này đúng hay sai.

a) Nếu số tự nhiên n không chia hết cho 4 thì $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 và ngược lại.

b) Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn tâm O khi và chỉ khi khoảng cách từ O đến Δ bằng bán kính của đường tròn.

c) Hai số u và v là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi $u + v = -\frac{b}{a}$, $uv = \frac{c}{a}$

d) Hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $OO' = R + R'$.

§2. TẬP HỢP

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Phần tử a thuộc tập hợp A được kí hiệu là $a \in A$, còn để chỉ a không thuộc A ta kí hiệu $a \notin A$.

2. Một tập hợp có thể được cho bằng cách liệt kê các phần tử hoặc chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó. Chẳng hạn

$$A = \{n \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1;2\}.$$

3. Tập rỗng, kí hiệu là $\varnothing$, là tập hợp không chứa phần tử nào cả. Chẳng hạn tập hợp

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \quad x^2 + 1 = 0\}$$

là tập hợp $\varnothing$.

4. Tập con A của tập B, kí hiệu $A \subset B$ với

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

5. $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

6. Các tập hợp số:

$\mathbb{N}^*$: Tập hợp các số nguyên dương

$\mathbb{N}$: Tập hợp các số tự nhiên

$\mathbb{Z}$: Tập hợp các số nguyên

$\mathbb{Q}$: Tập hợp các số hữu tỉ

$\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.

7. Đoạn, khoảng và nửa khoảng

Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

Khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$$(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}.$$

Nửa khoảng

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

$$(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$$

$$[\, a; +\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$$

7. Giao của hai tập hợp

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

8. Hợp của hai tập hợp

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in B \end{bmatrix}$$

9. Hiệu của hai tập hợp

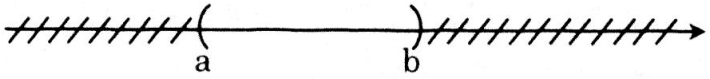
$A \setminus B = \{x \in A \text{ và } x \notin B\}$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$

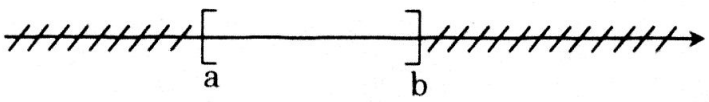
Nếu $B \subset A$ thì hiệu $A \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong A và kí hiệu là $C_A B$.

10. Biểu diễn một số tập con của $\mathbb{R}$ trên trục số.

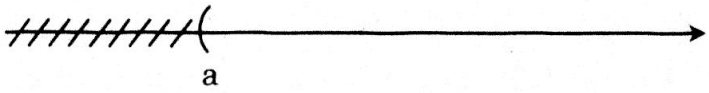
Khoảng (a; b)



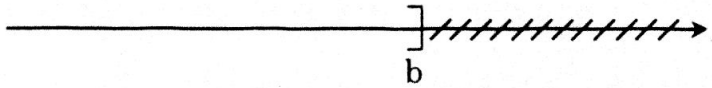
Đoạn [a; b]



Khoảng (a; +∞)



Nửa khoảng (−∞; a]



11. Ta có: Với a < b thì

$(a; b) = (-\infty; b) \cap (a; +\infty)$,

$[a; b) = (-\infty; b) \cap [a; +\infty)$,

$(-\infty; b] = (-\infty; b) \cup [a; b]$,

$(a; +\infty) = (a; b) \cup [b; +\infty)$.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Liệt kê các phần tử của một tập hợp dựa theo các tính chất của chúng và ngược lại, tìm tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

Phương pháp: Dựa trên các tính chất mà các phần tử của tập hợp phải thỏa mãn và dùng các kiến thức toán học đã biết để tìm ra các phần tử của tập hợp. Ngược lại, căn cứ vào các phần tử của tập hợp đã được liệt kê để tìm ra một quy luật thích hợp. Chú ý rằng có thể có nhiều tính chất cùng đặc trưng cho các phần tử của một tập.

Ví dụ 1.1: Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của chúng:

$A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \le 100$ và n là số chính phương$\}$;

$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m$ là ước của $6\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{(x+1)(x^2-5x+6)}{\sqrt{x-2}} = 0\}$;

$D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 7 = 5\}$

Giải

$A = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$

$B = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$

$C = \{3\}$ (ta phải có điều kiện $x > 2$ nên các giá trị $x = -11$ và $x = 2$ bị loại)

$D = \varnothing$ (không có phần tử nào thỏa mãn tính chất đã cho)

Ví dụ 1.2: Hãy viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của chúng:

a) $A = \{1; 2; 3\}$; b) $B = \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}\right\}$;

c) $C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Giải

a) Có thể có một số tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp A, chẳng hạn

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 3\}$, hoặc

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$

b) $B = \left\{\dfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \le n \le 5\right\}$

c) $C = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \le 4\}$, hoặc

$C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \le 16\}$, hoặc

$C = \{m \in \mathbb{Z} \mid -4 \le m \le 4\}$

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh một tập A là tập con của một tập B

Phương pháp: Để chứng tỏ $A \subset B$ ta lấy phần tử bất kì $x \in A$ và chứng minh $x \in B$.

Ví dụ 2: Chứng minh $A \subset B$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của $6\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của $3\}$;

b) $A = \{8m + 3 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4n - 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$;

c) A là tập hợp các hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc, B là tập hợp các hình thoi.

d) $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m$ là ước của $6\}$, $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m$ là ước của $12\}$

Giải

a) Với $n \in A$ ta có $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$. Suy ra $n = 3(2k)$, vì vậy n là bội của 3, tức là $n \in B$.

b) Phần tử $x \in A$ có dạng $x = 8m + 3 = 4(2m + 1) - 1$. Vì vậy x có dạng $4n - 1$ với $n = 2m + 1$, tức là $x \in B$.

c) Mỗi hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là một hình vuông, do đó cũng là hình thoi. Vì vậy $A \subset B$.

d) Ta có $A = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$, còn
$B = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
Rõ ràng $A \subset B$

VẤN ĐỀ 3: Tìm tập hợp các khả năng sắp xếp một số đối tượng theo một thứ tự nhất định.

Phương pháp: Tùy theo yêu cầu sắp xếp, ta liệt kê tất cả các khả năng có thể xảy ra.

Ví dụ 3: Bốn học sinh, trong đó có hai nữ là Liên, Hương và hai nam là Nghĩa, Tiến, muốn chụp ảnh chung, nhưng nam và nữ đứng xen kẻ nhau.

a) Hãy liệt kê tập hợp tất cả các khả năng khác nhau.

b) Tìm tập con gồm những khả năng mà Hương và Nghĩa đứng cạnh nhau.

c) Tìm tập con gồm những khả năng mà Liên đứng giữa hai bạn Nghĩa và Tiến.

d) Tìm tập con gồm những khả năng mà Tiến đứng ở phía trong.

Giải

Để dễ dàng viết các khả năng, ta viết tắt tên của mỗi người bởi chữ cái đầu tiên: T = Tiến, H = Hương, L = Liên, N = Nghĩa và tiến hành sắp xếp từ trái sang phải.

a) Tập hợp tất cả các khả năng khác nhau là

A = {HNLT; HTLN; LNHT; LTHN; NHTL; NLTH; THNL; TLNH}

b) B = {HNLT; LNHT; LTHN; NHTL; THNL; TLNH}

c) C = {HNLT; HTLN; NLTH; TLNH}

d) D = {HTLN; LTHN; NHTL; NLTH}

VẤN ĐỀ 4: Tìm tất cả tập con của một tập hợp thỏa mãn các điều kiện đã cho.

Phương pháp: Nếu tìm tất cả các tập con của một tập hợp A hữu hạn đã cho, trước hết chú ý rằng tập rỗng ∅ là tập con của mọi tập A. Sau đó liệt kê các tập con chứa 1 phần tử của tập A, tập con chứa hai phần tử của tập A,...

Nếu có thêm điều kiện đối với các tập con này thì căn cứ vào điều kiện ta sẽ tìm các phần tử tương ứng.

Ví dụ 4.1: Tìm tất cả các tập con của tập hợp

A {1; 2; 3; 4; 5}

Giải

Các tập hợp của tập A là:

Tập con rỗng ∅.

Tập con gồm 1 phần tử: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.

Tập con gồm 2 phần tử: {1; 2}, {1; 3}, {1; 4}, {1; 5}, {2; 3}, {2; 4}, {2; 5}, {3; 4}, {3; 5}, {4; 5}.

Tập con gồm 3 phần tử: {1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {1; 2; 5}, {1; 3; 4}, {1; 3; 5}, {1; 4; 5}, {2; 3; 4}, {2; 3; 5}, {2; 4; 5}, {3; 4; 5}.

Tập con gồm 4 phần tử: {1; 2; 3; 4}, {1; 2; 3; 5}, {1; 2; 4; 5}, {1; 3; 4; 5}, {2; 3; 4; 5}.

Tập con gồm 5 phần tử: {1; 2; 3; 4; 5}.

Ví dụ 4.2: Cho tập hợp A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Tìm tất cả các tập con của tập A gồm 3 phần tử sao cho tổng các phần tử này là một số chẵn.

Giải

Để tổng của 3 số nguyên là một số chẵn trong 3 số nguyên đó phải có hai số lẻ hoặc không có số lẻ nào. Nói cách khác các tập con này phải có một số chẵn hoặc ba số chẵn.

Chỉ có một tập con gồm 3 số chẵn của A là {2; 4; 6}. Các tập con gồm ba số của A trong đó chỉ có một số chẵn là:

{1; 2; 3}, {1; 2; 5}, {2; 3; 5}, {1; 3; 4}, {1; 4; 5}, {3; 4; 5},

{1; 3; 6}, {1; 5; 6}, {3; 5; 6}.

Vậy có tất cả 10 tập con của A thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Ví dụ 4.3: Cho các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 13x + 20 = 0\},\ B = \left\{\frac{2n}{n-1} \mid n \in \mathbb{N},\ 2 \le n \le 5\right\}.$$

Tìm các tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Giải

Từ điều kiện $A \cup X = B$ suy ra $A \subset B$ và $X \subset B$. Do đó nếu trong giả thiết bài toán mà A không phải là tập con của B thì bài toán này vô nghiệm. Nếu $A \subset B$ thì ta tìm các tập $X \subset B$ mà $A \cup X = B$. Trong các tập con đó thì nhỏ nhất là hiệu $B \setminus A$, rồi sau đó thêm vào một số phần tử của tập A.

Ta có

$$A = \left\{4\ ;\ \frac{5}{2}\right\},\ B = \left\{4\ ;\ 3\ ;\ \frac{8}{3}\ ;\ \frac{5}{2}\right\} \text{ suy ra } A \subset B.$$

Vậy các tập hợp X mà $A \cup X = B$ có thể chọn là:

$$\left\{3\ ;\ \frac{8}{3}\right\},\ \left\{4\ ;\ 3\ ;\ \frac{8}{3}\right\},\ \left\{3\ ;\ \frac{8}{3}\ ;\ \frac{5}{2}\right\},\ \left\{4\ ;\ 3\ ;\ \frac{8}{3}\ ;\ \frac{5}{2}\right\}.$$

VẤN ĐỀ 5: Các bài toán thực tế liên quan đến các phép toán về tập hợp.

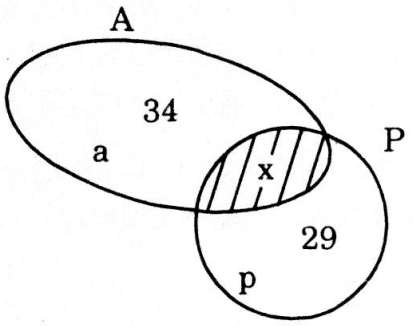
Phương pháp: Để giải loại bài toán này người ta thường dùng biểu đồ Ven để biểu thị tập hợp các đối tượng khác nhau, rồi xét hợp, giao của chúng để tìm ra tập hợp thỏa mãn yêu cầu đã cho

Ví dụ 5: Một đoàn du lịch có 57 khách, trong đó có 34 khách biết tiếng Anh, 29 khách biết tiếng Pháp và có 6 khách không biết cả hai thứ tiếng này. Hỏi trong đoàn có bao nhiêu khách biết cả hai thứ tiếng Anh và Pháp?

Giải

Gọi A là tập hợp các du khách biết tiếng Anh, P là tập hợp các du khách biết tiếng Pháp.

Thế thì tập A có 34 phần tử, tập P có 29 phần tử, được biểu thị bằng biểu đồ Ven như ở hình bên.



Gọi x là số du khách biết nói cả hai thứ tiếng Anh và Pháp, a là số du khách chỉ biết nói tiếng Anh, không biết nói tiếng Pháp, còn p là số du khách chỉ biết nói tiếng Pháp mà không biết nói tiếng Anh.

Theo bài toán ta có:

Số phần tử của tập A là: $34 = a + x$ (1)

Số phần tử của tập hợp P là: $29 = p + x$ (2)

Số phần tử của $A \cup B$ là số du khách biết ít nhất 1 trong hai thứ tiếng Anh và Pháp, nghĩa là bằng tổng số du khách trừ đi số người không biết cả hai thứ tiếng này.

Vậy số phần tử của tập $A \cup B$ là:

$$57 - 6 = 51 = a + p + x \quad (3)$$

Từ ba phương trình (1), (2), (3) ta suy ra ngay $x = 12$.

Vậy có 12 du khách biết cả hai thứ tiếng Anh và Pháp.

VẤN ĐỀ 6: Các bài toán liên quan đến các phép toán về tập hợp số.

Phương pháp: Đối với các tập hợp số, nếu các tập hợp này là hữu hạn thì ta liệt kê các phần tử của chúng, do đó dễ dàng tìm được hợp, giao, hiệu, phần bù của chúng.

Nếu đó là các khoảng, nửa khoảng, đoạn thì ta biểu diễn chúng trên trục số để tìm hợp, giao,... của chúng.

Ví dụ 6.1: Cho hai nửa khoảng $A = (a; a + 3]$, $B = [b; b + 2)$.

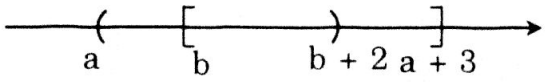
a) Tìm điều kiện cho a và b để $B \subset A$. Trong trường hợp đó tìm phần bù $C_A B$.

b) Với điều kiện nào của a và b thì $A \cap B \neq \varnothing$

Giải

a) Muốn cho $B \subset A$ thì hai đầu mút của nửa khoảng B phải nằm trong nửa khoảng A, nghĩa là

$a < b$ và $b + 2 \leq a + 3$



Từ đó suy ra: $a < b \leq a + 1$

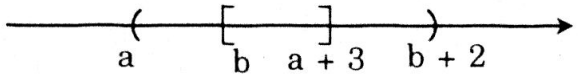
Lúc đó $C_A B = (a; b) \cup [b + 2; a + 3]$.

b) Ta có $A \cap B \neq \varnothing$ nếu có ít nhất một phần tử $x \in A \cap B$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$b \leq a + 3$ và $b + 2 > a$

Từ đó suy ra $a - 2 < b \leq a + 3$.



Ví dụ 6.2: Cho hai tập hợp

$$A = \left\{ \frac{3n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n \leq 4 \right\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 - x^2 - 6x = 0\}.$$

a) Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$

b) Tìm các tập hợp X thỏa mãn $A \cap B \subset X \subset A \cup B$.

Giải

Trước hết liệt kê các phần tử của A và B, từ đó tìm được $A \cap B$ và $A \cup B$. Muốn tìm tập X thỏa mãn điều kiện $A \cap B \subset X \subset A \cup B$, đầu tiên ta lấy $X = A \cap B$, sau đó ghép thêm các phần tử thuộc $A \cup B$ mà không thuộc $A \cap B$.

a) Ta có

$$A = \left\{0 ; \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{9}{4} ; \frac{12}{5}\right\}, B = \left\{-\frac{3}{2} ; 0 ; 2\right\}.$$

Vậy $A \cap B = \{0; 2\}$

$$A \cup B = \left\{-\frac{3}{2} ; 0 ; \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{9}{4} ; \frac{12}{5}\right\}$$

b) Các tập hợp X thỏa mãn điều kiện bài toán là: $X = A \cap B = \{0; 2\}$, rồi ghép thêm vào một phần tử, được: $\left\{-\frac{3}{2} ; 0 ; 2\right\}$, $\left\{0; \frac{3}{2} ; 2\right\}$, $\left\{0 ; 2 ; \frac{9}{4}\right\}$, $\left\{0 ; 2 ; \frac{12}{5}\right\}$.

Ghép thêm vào $A \cap B$ hai trong bốn phần tử còn lại của $A \cup B$ ta được các tập hợp.

$\left\{-\frac{3}{2}; 0; 2; \frac{3}{2}\right\}$, $\left\{-\frac{3}{2}; 0; 2; \frac{9}{4}\right\}$, $\left\{-\frac{3}{2}; 0; 2; \frac{12}{5}\right\}$,

$\left\{0; \frac{3}{2}; 2; \frac{9}{4}\right\}$, $\left\{0; \frac{3}{2}; 2; \frac{12}{5}\right\}$, $\left\{0; 2; \frac{9}{4}; \frac{12}{5}\right\}$.

Ghép thêm ba trong bốn phần tử còn lại ta được các tập hợp.

$\left\{-\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}; 2; \frac{9}{4}\right\}$, $\left\{-\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}; 2; \frac{12}{5}\right\}$,

$\left\{-\frac{3}{2}; 0; 2; \frac{9}{4}; \frac{12}{5}\right\}$, $\left\{0; \frac{3}{2}; 2; \frac{9}{4}; \frac{12}{5}\right\}$.

Cuối cùng ghép bốn phần tử còn lại ta được tập hợp $A \cup B$.

C/ LUYỆN TẬP

1.11. Trong các tập hợp dưới đây, tập hợp nào khác rỗng? Hãy liệt kê các phần tử của những tập hợp đó:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 5 = 0\}$;

b) $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \le 8, m \text{ là ước của } 12\}$;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 3n + 6 = 11\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 + 7x^2 + 5x = 0\}$.

1.12. Hãy viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của chúng.

a) $A = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$;

b) $B = \left\{2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}\right\}$;

c) $C = \{1; 3; 5; 7\}$;

d) $D = \{2; 5; 10; 17; 26; 37\}$.

1.13. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập con của tập nào?

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 \le x \le 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 3\}$,

$C = [-3; 3]$, $D = [-3; +\infty)$.

1.14. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

a) Tìm tất cả các tập hợp con gồm bốn phần tử của tập hợp A sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

b) Tìm các tập con gồm bốn phần tử của tập hợp A không chứa tập con $B = \{5; 7\}$.

c) Tìm $C_A B$.

d) Tìm tất cả các tập con của tập hợp X sao cho $B \subset X \subset A$.

1.15. Tìm tất cả các tập con của tập hợp.

$$A = \{a; b; c; d\}.$$

1.16. Cho các tập hợp

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 100\};$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là số chính phương}, 1 \le n \le 100\};$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ nguyên tố với } 11, n \le 100\};$$

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k + 1, 1 \le k \text{ nguyên} \le 30\}.$$

Trong các tập hợp này tập nào là tập con của tập nào?

1.17. Cho các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0\},$$

$$B = \left\{\frac{3n}{2n-1}\right\} \mid n \in \mathbb{Z}, -1 \le n \le 2\}.$$

a) Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

b) Tìm các tập hợp X để $A \cup X = A \cup B$.

c) Tìm các tập hợp Y để $A \cap B \subset Y \subset A \cup B$.

d) Tìm phần bù của $A \cap B$ trong B.

1.18. Cho hai nửa khoảng

$$A = [a - 2; a + 1), B = (b + 1; b + 5].$$

a) Tìm điều kiện cho a và b để $A \cap B = \varnothing$.

b) Với điều kiện nào của a và b thì $A \subset B$. Trong trường hợp đó, tìm $C_B A$.

c) Có tồn tại các số a và b nào để

$$A \cup B = [2; 6] \text{ không?}$$

d) Tìm các số a, b để $A \cup B = (-2; 4)$.

.19. Năm học sinh, trong đó có hai nữ là Hà, Mai và ba nam là Chương, Định và Tuấn muốn chụp ảnh chung, nhưng nam và nữ phải đứng xen kẻ nhau.

a) Hãy liệt kê tập hợp tất cả các khả năng khác nhau.

b) Tìm tập hợp gồm những khả năng mà Mai đứng giữa hai bạn Chương và Tuấn.

c) Tìm tập hợp những khả năng mà Tuấn đứng ở chính giữa.

.20. Câu lạc bộ thể thao của một trường trung học phổ thông có 135 học sinh tham gia, mỗi bạn chơi ít nhất một trong ba môn đá bóng, chuyền và bóng bàn. Biết rằng có 71 bạn chơi bóng đá, 58 bạn chơi bóng chuyền, 55 bạn chơi bóng bàn, trong đó có 19 bạn vừa chơi bóng đá và bóng chuyền, 20 bạn vừa chơi bóng đá và chơi bóng bàn và 17 bạn vừa chơi bóng chuyền và bóng bàn.

Hỏi có bao nhiêu học sinh chơi cả ba môn bóng đá, bóng chuyền và bóng bàn?

Chương II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên, trong đó x nhận giá trị thuộc tập $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số. Ta gọi x là ***biến số,*** y là ***hàm số*** của x. Tập D được gọi là ***tập xác định*** (hay miền xác định) của hàm số.

2. Một hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng biểu đồ hoặc bằng công thức. Chú ý rằng một hàm số có thể được cho bằng các công thức khác nhau trên các khoảng khác nhau.

3. Khi hàm số được cho bởi công thức $y = f(x)$ mà không chỉ rõ tập xác định thì phải hiểu tập xác định của nó là tập hợp các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.

4. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi $x \in D$.

5. Cho khoảng (a; b), trong đó a có thể là một số hoặc $-\infty$, b có thể là một số hoặc $+\infty$. Hàm số $y = f(x)$ ***đồng biến*** (tăng) trên khoảng (a; b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Điều này tương đương với: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, $x_1 \neq x_2$.

Hàm số $y = f(x)$ ***nghịch biến*** (giảm) trên khoảng (a; b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Điều này tương đương với: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, $x_1 \neq x_2$.

6. Khảo sát sự biến thiên của hàm số là xét xem hàm số đồng biến, nghịch biến trên các khoảng nào trong tập xác định của hàm số đó.

7. Kết quả khảo sát sự biến thiên được thể hiện trong một bảng, gọi là ***bảng biến thiên*** của hàm số.

8. Hàm số $y = f(x)$ với tập hợp xác định D được gọi là ***hàm số chẵn*** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

9. Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là ***hàm số lẻ*** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

10. Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Tìm tập xác định của mỗi hàm số.

Phương pháp: Để tìm tập xác định của một hàm số, ta phải tìm điều kiện để cho mỗi biểu thức trong hàm số đó có nghĩa; giải các điều kiện này để tìm tập hợp các giá trị của biến số làm cho mỗi biểu thức trong hàm số đó có nghĩa, rồi lấy giao của các tập này.

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{2x + 3}$; b) $y = \dfrac{4x + 7}{2x^2 - 5x + 3}$;

c) $y = \dfrac{\sqrt{-4x + 5}}{x^2 + x + 1}$; d) $y = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{x - 3}$.

Giải

a) Đối với hàm số này, điều kiện là mẫu thức phải khác không.

$$2x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2}.$$

Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) Mẫu thức khác không khi

$$2x^2 - 5x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ và } x \neq \frac{3}{2}$$

Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1 ; \dfrac{3}{2}\right\}$.

c) Ta phải có các điều kiện

$$-4x + 5 \geq 0 \text{ và } x^2 + x + 1 \neq 0$$

Ta có: $-4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập xác định là $D = (-\infty; \frac{5}{4}]$.

d) Điều kiện là $2x + 1 \geq 0$ và $x - 3 \neq 0$.

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 3$.

Vậy tập xác định là $D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$

VẤN ĐỀ 2: Xác định các điểm thuộc đồ thị của một hàm số.

Phương pháp: Sau khi tìm tập xác định của hàm số, để biết một điểm $M(x_M; y_M)$ có thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ hay không, ta phải kiểm tra xem x_M có thuộc tập xác định của hàm số không. Nếu x_M thuộc tập xác định, phải kiểm tra điều kiện $y_M = f(x_M)$ có được thỏa mãn không.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 3} + \sqrt{x - 1}$

a) Tìm tập xác định của hàm số

b) Trong các điểm A(−1; 4), B(2; 2), C(5; 6), $D\left(0; \frac{1}{3}\right)$, $E(4; 7 + \sqrt{3})$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên?

Giải

a) Ta có tập xác định của hàm số là

$[1; +\infty) \setminus \{3\}$.

b) Các điểm A, D có hoành độ không thuộc tập xác định của hàm số nên không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Với điểm B(2; 2) và điểm $E(4; 7 + \sqrt{3})$ ta có

$2 = y_B = f(2)$,

$7 + \sqrt{3} = y_E = f(4)$,

nên B và E thuộc đồ thị của hàm số.

Với điểm C(5; 6) ta có $y_C = 6 \neq f(5)$ nên C cũng không thuộc đồ thị hàm số.

VẤN ĐỀ 3: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Phương pháp: Để khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$, ta lấy $x_1, x_2 \in (a; b)$ tùy ý, $x_1 \neq x_2$. Kí hiệu $\Delta x = x_1 - x_2$, $\Delta y = f(x_1) - f(x_2)$ và xét tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nếu tỉ số đó dương thì hàm số đồng biến, tỉ số đó âm thì hàm số nghịch biến.

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$;

b) $f(x) = \frac{3}{3x - 2}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$;

c) $f(x) = \frac{x - 4}{2x + 3}$ trên tập xác định D của hàm số;

d) $f(x) = \sqrt{3x - 5}$ trên tập xác định D của hàm số

Giải

a) Ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(5x_1^2 + 3x_1 - 2) - (5x_2^2 + 3x_2 - 2)}{x_1 - x_2}$

$= \frac{5(x_1^2 - x_2^2) + 3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$

$= \frac{(x_1 - x_2)(5x_1 + 5x_2 + 3)}{x_1 - x_2}$

Với $x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$ và $x_1 \neq x_2$ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5x_1 + 5x_2 + 3 < 0$.

Với $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{3x_1 - 2} - \frac{3}{3x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{9(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_2)(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)}$

Với $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-9}{(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)} < 0.$

Còn với $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ ta cũng có $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$

Vậy hàm số nghịch biến trên cả hai khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

c) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_1 - 4}{2x_1 + 3} - \frac{x_2 - 4}{2x_2 + 3}}{x_1 - x_2} =$

$$= \frac{11(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(2x_1 + 3)(2x_2 + 3)}$$

Với $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11}{(2x_1 + 3)(2x_2 + 3)}$

Với $x_1, x_2 \in \left(-\infty ; -\frac{3}{2}\right)$ hoặc $x_1, x_2 \in \left(-\frac{3}{2} ; +\infty\right)$ thì

$(2x_1 + 3)(2x_2 + 3) > 0$ nên $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng của tập xác định D.

d) Tập xác định của hàm số là $D = [\frac{5}{3}; +\infty)$

Ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{3x_1 - 5} - \sqrt{3x_2 - 5}}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{(\sqrt{3x_1 - 5} - \sqrt{3x_2 - 5})(\sqrt{3x_1 - 5} + \sqrt{3x_2 - 5})}{(x_1 - x_2)(\sqrt{3x_1 - 5} + \sqrt{3x_2 - 5})}$$

$$= \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{3x_1 - 5} + \sqrt{3x_2 - 5})}$$

Với $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ thì

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{\sqrt{3x_1 - 5} + \sqrt{3x_2 - 5}} > 0$$

Vậy hàm số đồng biến trên D.

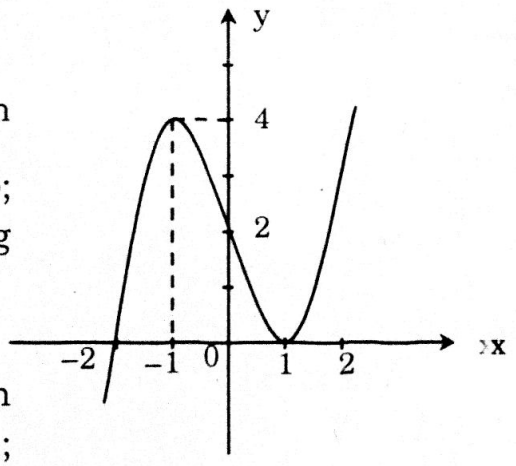
VẤN ĐỀ 4: Lập bảng biến thiên của một hàm số dựa vào đồ thị của nó.

Phương pháp: Để lập bảng biến thiên dựa vào đồ thị của hàm số, ta xem trong khoảng nào đồ thị hàm số đi lên thì hàm số đồng biến trong khoảng đó, còn đồ thị đi xuống thì hàm số nghịch biến.

Ví dụ 4: Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị như hình dưới.

a) Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.

b) Tính tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, xét sự biến thiên của hàm số trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ và so sánh với bảng biến thiên trong câu a.



Giải

a) Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị đi lên trong các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, còn đồ thị đi xuống trong khoảng $(-1; 1)$

Vậy ta có bảng biến thiên sau đây

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

b) Ta có với $x_1 \neq x_2$ thì

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_1^3 - 3x_1 + 2) - (x_2^3 - 3x_2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3)}{x_1 - x_2}$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3$$

Với $x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$ hoặc $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$

Thì $x_1^2 > 1$, $x_2^2 > 1$, $x_1x_2 > 1$

Do đó $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Vậy trong hai khoảng này hàm số đồng biến.

Với $x_1, x_2 \in (-1; 1)$ thì $-1 < x_1 < 1$, $-1 < x_2 < 1$

Do đó $x_1^2 < 1$, $x_2^2 < 1$ và $x_1x_2 < 1$

Vậy $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ và hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1; 1)$.

So với bảng biến thiên trong câu a ta thấy chiều biến thiên trùng hợp.

VẤN ĐỀ 5: Xác định tính chẵn lẻ của một hàm số

Phương pháp: Để xét xem hàm số $y = f(x)$ là chẵn hay lẻ trên miền xác định D, trước hết ta phải xét điều kiện: Với $x \in D$ thì $-x \in D$.

Nếu điều kiện đó thỏa mãn thì ta mới xét mối liên hệ giữa $f(-x)$ và $f(x)$ với x tùy ý thuộc D.

Nếu $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$ thì $f(x)$ là hàm chẵn

Nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$ thì $f(x)$ là hàm lẻ

Nếu tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(-x_0) \neq f(x_0)$ và $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ thì $f(x)$ không phải là hàm chẵn cũng không phải là hàm lẻ.

Ví dụ 5.1: Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{3x_2 + 2}{x - 1}$; b) $y = x^4 - 3x^2 + x$;

c) $y = \frac{1}{2x^3 + 3x}$; d) $y = |3x + 5| + |3x - 5|$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta thấy $-1 \in D$ nhưng $1 \notin D$ nên điều kiện $x \in D \Rightarrow -x \in D$ không thỏa mãn. Vậy hàm số này không chẵn và không lẻ.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$, do đó với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$. Tuy nhiên ta có $f(1) = -1$ còn $f(-1) = -3$ nên $f(-1) \neq f(1)$ và $f(-1) \neq -f(1)$. Vậy hàm số này cũng không chẵn và không lẻ.

c) Ta có $f(x) = \dfrac{1}{x(2x^2 + 3)}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Do đó với $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \dfrac{1}{-x(2x^2 + 3)} = -f(x)$ nêên đây là hàm số lẻ trên D.

d) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$, do đó với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$.

Mặt khác:

$$f(-x) = |-3x + 5| + |-3x - 5|$$
$$= |3x - 5| + |3x + 5| = f(x)$$

Vậy $y = |3x + 5| + |3x - 5|$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$

Ví dụ 5.2: Cho hàm số $y = x^3 - 3ax$. Chứng minh rằng:

a) Với mọi số thực a tùy ý hàm số đã cho là một hàm số lẻ.

b) Với $a < 0$ thì hàm số luôn luôn đồng biến

c) Với $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{a})$ và $(\sqrt{a}; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$, do đó với $x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có

$$f(-x) = -x^3 + 3ax = -f(x).$$

Vậy f(x) là một hàm số lẻ

b) Xét tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x_1^3 - 3ax_1) - (x_2^3 - 3ax_2)}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) - 3a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3a)}{x_1 - x_2}$$

Với $x_1 \neq x_2$ ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3a \qquad (1)$$

Với $a < 0$ ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 - 3a > 0,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

c) Với $a > 0$ ta xét biểu thức (1)

Nếu $x_1, x_2 \in (-\infty; -\sqrt{a})$ hoặc $x_1, x_2 \in (\sqrt{a}; +\infty)$ thì $x_1, x_2 < -\sqrt{a}$ hoặc $x_1, x_2 > \sqrt{a}$, do đó $x_1^2 > a$, $x_2^2 > a$ và $x_1x_2 > a$

Vì vậy

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3a > 0$, suy ra $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, nghĩa là hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{a})$ và $(\sqrt{a}; +\infty)$

Nếu $x_1, x_2 \in (-\sqrt{a}; \sqrt{a})$ thì $-\sqrt{a} < x_1, x_2 < \sqrt{a}$, do đó

$x_1^2 < a$, $x_2^2 < a$ và $x_1x_2 < a$

Vì vậy $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3a < 0$, nên $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$

C/ LUYỆN TẬP

2.1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{\sqrt{-2x+5}}{x+1}$;

b) $y = \dfrac{4x+3}{(x-3)\sqrt{x+2}}$;

c) $y = \dfrac{\sqrt{x-2} - x}{3x^2 - 2x + 1}$;

d) $y = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x+2}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-3x+1}, & x < 0 \end{cases}$

2.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D. Chứng minh rằng

a) Nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ mà tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D.

b) Nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ mà tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D.

2.3. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x^2 + 3x + 1}$

a) Tìm tập xác định của hàm số

b) Trong các điểm A(–3; 10), B(–2; 0), $C\left(2\ ;\ \frac{2}{15}\right)$, M(–1; 1), điểm nào thuộc đồ thị của hàm số đã cho, điểm nào không thuộc?

2.4. Khảo sát sự biến thiên của hàm số y = f(x) trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = \frac{3x-1}{-2x+1}$ trên tập xác định của hàm số

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ trên khoảng (1; +∞)

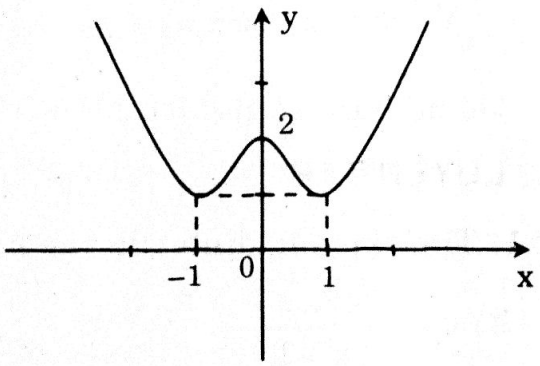
c) $f(x) = x^3 + 4x - 1$ trên toàn trục số.

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2$ trên khoảng (–∞; 0)

2.5. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có đồ thị như trong hình bên.

a) Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.

b) Tính tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ và xét sự biến thiên của hàm số trên các khoảng (–∞; –1) và (–1; 0). So sánh kết quả này với bảng biến thiên trong câu a.



2.6. Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1}$;

b) $y = \frac{2x+5}{x-2}$

c) $y = 3x^2 - 5|x| + 1$;

d) $y = 4x^3 - 7x$

2.7. Cho hàm số $y = x^4 + 2ax^2 + b$, với a, b là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

a) Hàm số đã cho là một hàm số chẵn trên toàn bộ trục số.

b) Nếu a > 0 thì hàm số nghịch biến trên khoảng (–∞; 0) và đồng biến trên khoảng (0; +∞).

c) Nếu a < 0 thì hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{-a})$, $(0; \sqrt{-a})$ và đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{-a}; 0)$, $(\sqrt{-a}; +\infty)$.

2.8. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 5x^3 + 4x - 1$;

b) $y = |4x - 1| + |4x + 1|$,

c) $y = \dfrac{5x^4 - 2x^2 + 3}{x^2}$;

d) $y = \dfrac{2x^2 + 5}{x + 3}$

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$, với $a \neq 0$. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

2. Chiều biến thiên. Khi $a > 0$ hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, khi $a < 0$ hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

3. Bảng biến thiên:

$a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

4. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng, song song với đường thẳng $y = ax$, cắt trục tung tại điểm $B(0; b)$ và cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\dfrac{b}{a}\ ;\ 0\right)$

5. Ta cũng nói $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(-\dfrac{b}{a}\ ;\ 0\right)$ và $B(0; b)$. Hệ số góc của hai đường thẳng này là a. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng có hệ số góc bằng nhau.

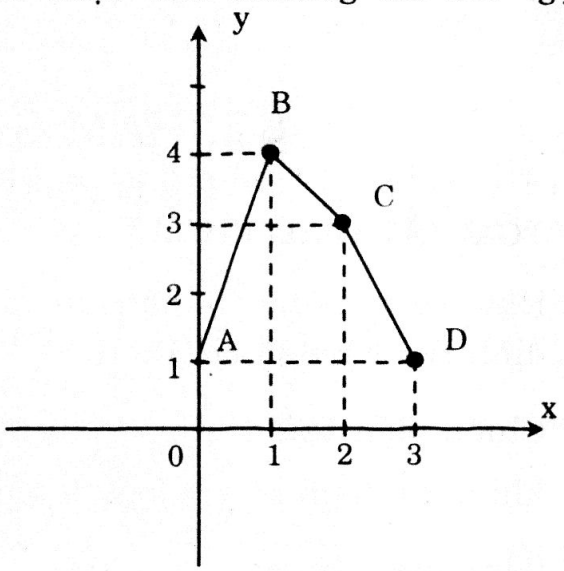
6. Hàm số hằng $y = b$ có đồ thị là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$.

7. Hàm số bậc nhất trên từng khoảng và đường gấp khúc

Sau đây là một ví dụ về hàm số bậc nhất trên từng khoảng

$$y = \begin{cases} 3x + 1 \text{ nếu} & 0 \le x < 1, \\ -x + 5 \text{ nếu} & 1 \le x < 2, \\ -2x + 7 \text{ nếu} & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Để vẽ được đồ thị của hàm số này trên đoạn [0; 3] ta vẽ đồ thị của các hàm bậc nhất trên mỗi đoạn hoặc nửa khoảng đã cho (gọi chung là khoảng).



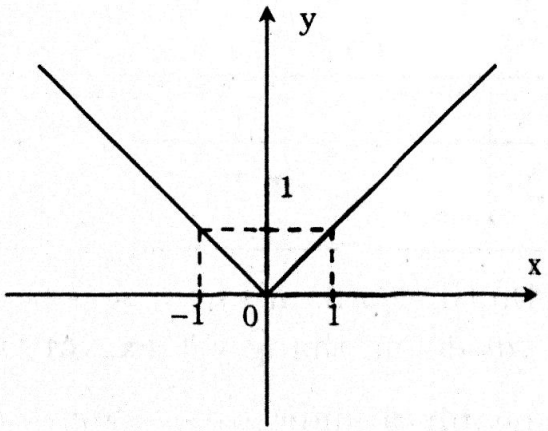
Trên đoạn [0; 3] đồ thị hàm số này là một đường gấp khúc như hình vẽ bên.

Đoạn AB là đồ thị của hàm số $y = 3x + 1$ trên nửa khoảng [1; 0), đoạn BC là đồ thị của hàm số $y = -x + 5$ trên nửa khoảng [1; 2) và đoạn CD là đồ thị của hàm số $y = -2x + 7$ trên đoạn [2; 3].

Ta được đường gấp khúc ABCD

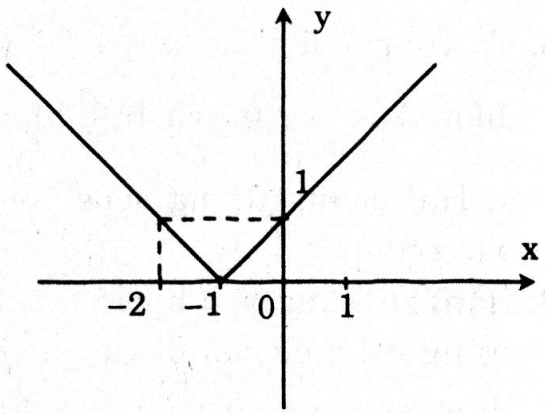
8. Hàm số $y = |x|$

Ta có $y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \ge 0, \\ -x \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$



Đồ thị của hàm số $y = |x|$ là một đường gấp khúc đặc biệt, đối xứng qua trục tung.

9. Hàm số $y = |ax + b|$, $a \neq 0$. Đồ thị của hàm số này cũng là một đường gấp khúc tương tự đồ thị hàm số $y = |x|$. Chẳng hạn hình bên là đồ thị của hàm số



$$y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \ge -1, \\ -x - 1 \text{ nếu } x < -1. \end{cases}$$

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số $y = ax + b$ và hàm số $y = |ax + b|$

Phương pháp: Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ là một đường thẳng nên để vẽ đồ thị hàm số này ta chỉ cần xác định hai điểm, thường là lấy hai điểm trên hai trục tọa độ.

Đối với hàm số $y = |ax + b|$ ta dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối, chia khoảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Trên mỗi khoảng ta có một hàm số bậc nhất.

Ví dụ 1: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = -2x + 3$; b) $y = |-2x + 3|$;

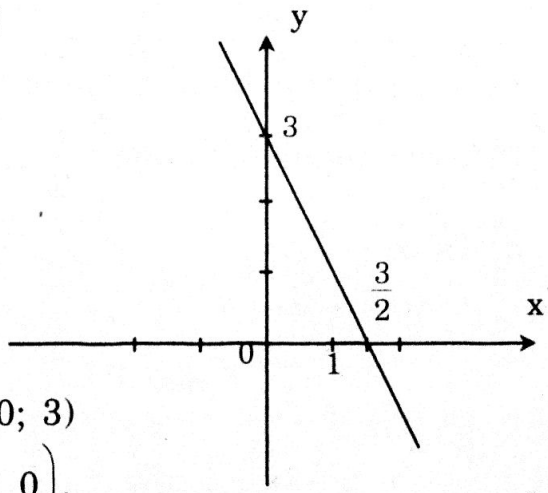
c) $y = 3x - 4$; d) $y = |3x - 4|$.

Giải

a) Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x + 3$ là:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 3) và cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{3}{2}\ ;\ 0\right)$.

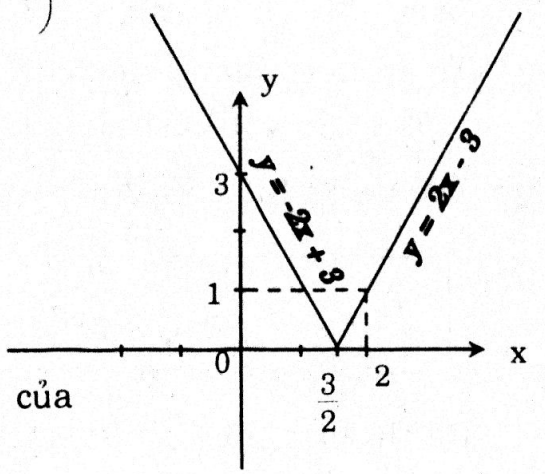


b) Ta có

$$y = |-2x + 3| = \begin{cases} -2x + 3 \text{ nếu } x \le \frac{3}{2}, \\ 2x - 3 \text{ nếu } x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |-2x + 3|$ là

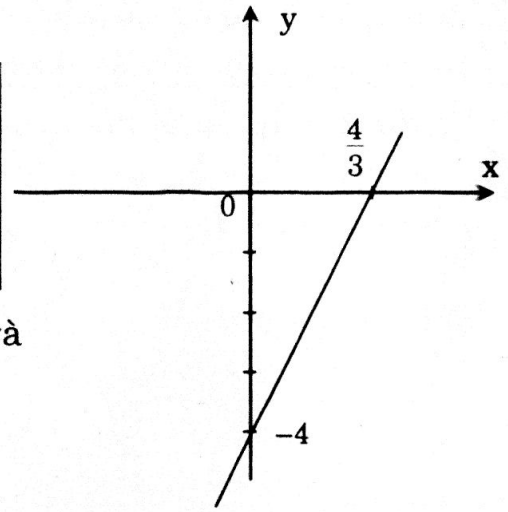
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



Đồ thị hàm số $y = |-2x + 3|$ là một đường gấp khúc. Trên nửa khoảng $\left(-\infty ; \frac{3}{2}\right]$ đồ thị hàm số này trùng với đồ thị hàm số $y = -2x + 3$, còn trên khoảng $\left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$ đồ thị trùng với đồ thị hàm số $y = 2x - 3$.

c) Bảng biến thiên của hàm số $y = 3x - 4$ là:

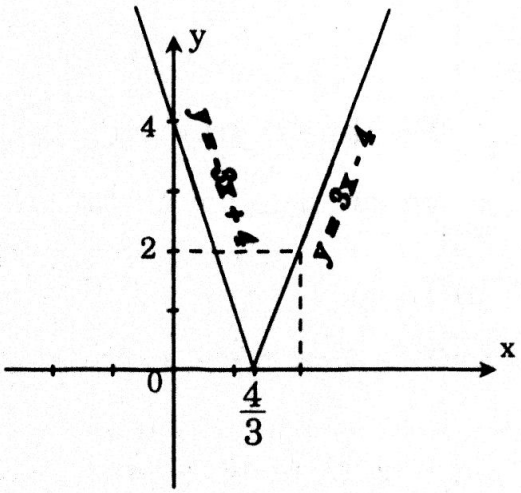
x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$



Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; -4)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{4}{3} ; 0\right)$.

d) Ta có

$$y = |3x - 4| = \begin{cases} 3x - 4 \text{ nếu } x \geq \frac{4}{3} \\ -3x + 4 \text{ nếu } x < \frac{4}{3} \end{cases}$$



Từ đó ta có biến thiên của hàm số $y = |3x + 4|$ là

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |3x - 4|$ là một đường gấp khúc. Trên khoảng $\left(-\infty ; \frac{4}{3}\right)$ đồ thị hàm số này là đồ thị hàm số $y = -3x + 4$, còn trên nửa khoảng $\left[\frac{4}{3} ; +\infty\right)$ đồ thị hàm số này là đồ thị hàm số $y = 3x - 4$.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$ luôn nằm ở nửa trên của mặt phẳng tọa độ và gồm hai nửa đường thẳng. Một nửa đường thẳng là đồ thị của hàm số $y = ax + b$, nửa đường thẳng kia là đồ thị của hàm số $y = -ax - b$.

VẤN ĐỀ 2: Xác định hàm số $y = ax + b$ để đồ thị của nó đi qua hai điểm đã cho.

Phương pháp: Thay thế tọa độ hai điểm đã cho vào phương trình $y = ax + b$ ta sẽ được hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn a và b. Giải ra sẽ được hai số phải tìm.

Vấn đề này còn được phát biểu dưới dạng: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đã cho.

Ví dụ 2: Tìm hàm số $y = ax + b$ mà đồ thị đi qua hai điểm M(–2; 1) và N(1; 3). Vẽ đồ thị hàm số đó

Giải

Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua M(–2; 1) nên ta có:

$$1 = a(-2) + b \qquad (1)$$

Tương tự đồ thị hàm số đi qua N(1; 3) nên ta có

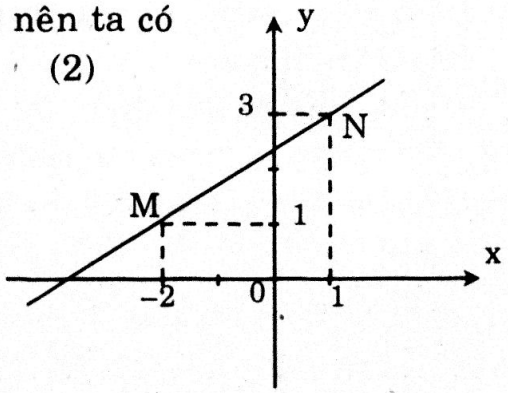
$$3 = a.1 + b \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

Thay vào (2) được $b = \frac{7}{3}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

Đồ thị hàm số xem hình bên



VẤN ĐỀ 3: Xác định hàm số $y = ax + b$ để đồ thị của nó song song với một đường thẳng đã cho và đi qua giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

Phương pháp: Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a_1x + b_1$ song song khi và chỉ khi $a = a_1$ và $b \neq b_1$.

Để tìm giao điểm của hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ ta giải phương trình $ax + b = a'x + b'$ tìm ra x rồi thay vào một trong hai phương trình để tìm y.

Ví dụ 3: Xác định hàm số $y = ax + b$ sao cho đồ thị của nó:

a) Song song với đường thẳng $y = -3x + 2$ và cắt trục hoành tại điểm $x = 2$. Vẽ đồ thị hàm số.

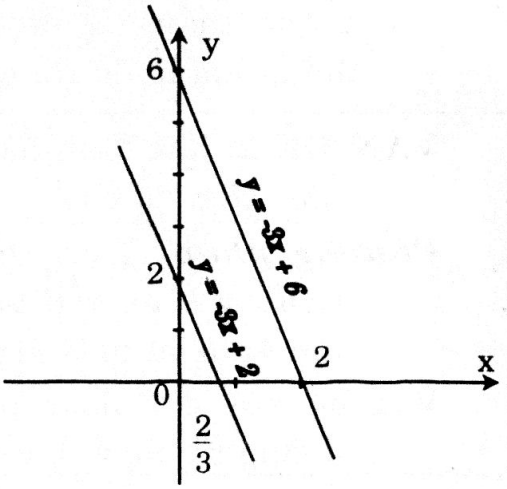
b) Cắt trục tung tại điểm y = −1 và đi qua giao điểm của hai đường thẳng y = −2x + 5 và y = x + 2. Vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Giải

a) Đồ thị hàm số y = ax + b song song với đường thẳng y = −3x + 2 nếu a = −3. Đồ thị này đi qua điểm (2; 0) nên ta có:

$$0 = (-3).2 + b \Rightarrow b = 6$$

Vậy ta có hàm số y = −3x + 6 có đồ thị ở hình bên



b) Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng y = −2x + 5 và y = x + 2 là nghiệm của phương trình

$$-2x + 5 = x + 2 \Rightarrow x = 1$$

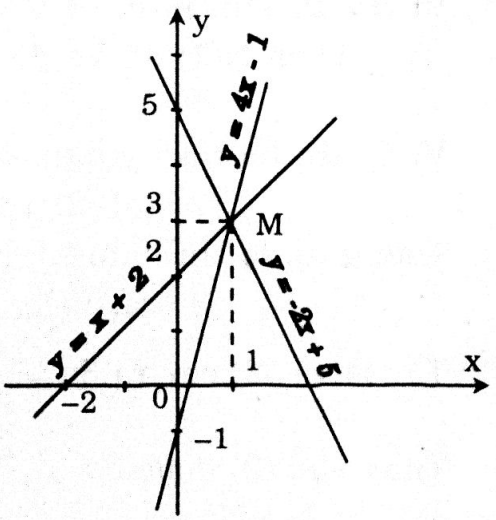
Suy ra y = 3

Vậy giao điểm là M(1; 3). Đồ thị hàm số y = ax + b cắt trục tung tại (0; −1) nên b = −1.

Đồ thị này đi qua điểm M(1; 3) nên

$$3 = a.1 - 1 \Rightarrow a = 4$$

Vậy ta có hàm số y = 4x − 1, đồ thị xem hình trên.



Ghi chú: Đối với trường hợp của câu b, ta nói ba đường thẳng y = −2x + 5, y = x + 2 và y = 4x − 1 đồng quy (cùng đi qua một điểm).

VẤN ĐỀ 4: Xác định các hàm số bậc nhất để đồ thị của chúng là các đường thẳng đồng quy.

Phương pháp: Muốn cho ba đường thẳng đồng quy thì giao điểm của hai đường thẳng phải thuộc đường thẳng thứ ba, hoặc giao điểm của các cặp đường thẳng phải trùng nhau. Vậy trước hết tìm hoành độ giao điểm của đường thẳng thứ nhất với đường thẳng thứ hai rồi tìm hoành độ giao điểm của đường thẳng thứ nhất (hoặc thứ hai) với đường thẳng thứ ba. Cho các hoành độ này bằng nhau ta suy ra giao điểm của ba đường thẳng và xác định được các hàm số cần tìm.

Ví dụ 4: a) Xác định m để các đường thẳng sau đồng quy:

$$y = -x + 1,\ y = mx + 4,\ y = x + m + 1.$$

b) Với mỗi giá trị m tìm được, vẽ các đường thẳng tương ứng trên cùng một hệ trục tọa độ.

Giải

a) Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $y = -x + 1$ và $y = mx + 4$ là nghiệm của phương trình $-x + 1 = mx + 4$

$$\Leftrightarrow (m + 1)x = -3$$

Với $m = -1$ thì phương trình này vô nghiệm

Với $m \neq -1$ ta được nghiệm $x = -\dfrac{3}{m+1}$ (1)

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $y = -x + 1$ và $y = x + m + 1$ là nghiệm của phương trình

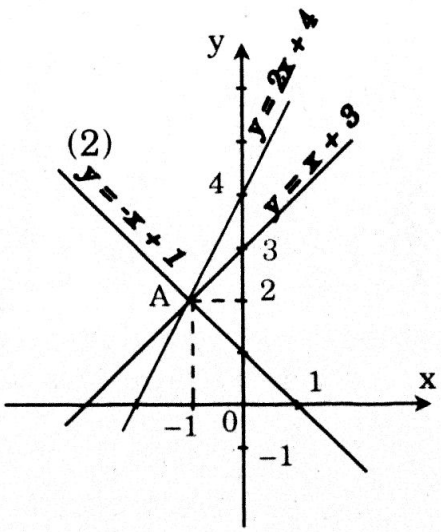
$$-x + 1 = x + m + 1 \Leftrightarrow 2x = -m$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{m}{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$-\frac{3}{m+1} = -\frac{m}{2} \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $m = 2$ và $m = -3$



Với $m = 2$ ta có ba đường thẳng đồng quy là

$$y = -x + 1,$$

$$y = 2x + 4,$$

$$y = x + 3.$$

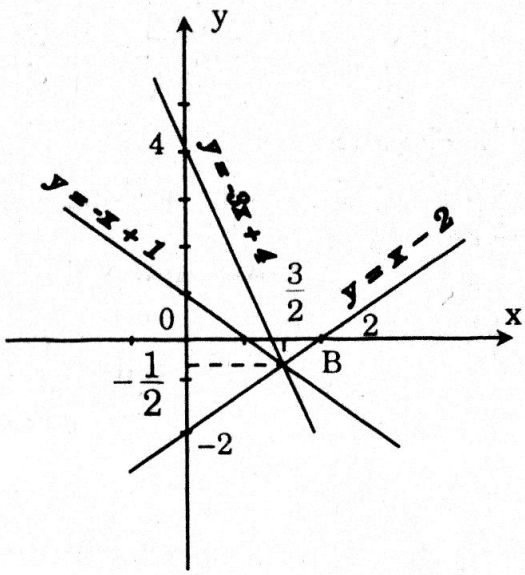
Đồng quy tại điểm A(−1; 2).

$m = -3$ ta có ba đường thẳng đồng quy là

$$y = -x + 1,$$

$$y = -3x + 4,$$

$$y = x - 2.$$



Đồng quy tại điểm $B\left(\frac{3}{2}\ ;-\frac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị của các hàm số trong hai trường hợp này xem hai hình bên.

VẤN ĐỀ 5: Tìm công thức xác định trên các khoảng của hàm số $y = |ax + b| \pm |cx + d|$. Vẽ đồ thị hàm số trên các khoảng đó.

Phương pháp: Dùng định nghĩa giá trị tuyệt đối, chia các khoảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Trên mỗi khoảng tìm biểu thức của hàm số y.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = |x - 1| + |-2x - 1|$

a) Tìm công thức xác định hàm số trên các khoảng

$\left(-\infty\ ;-\frac{1}{2}\right]$, $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$, $[1;\ +\infty)$.

b) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.

Giải

a) Ta có $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ nếu } x \geq 1, \\ -x+1, \text{ nếu } x < 1. \end{cases}$

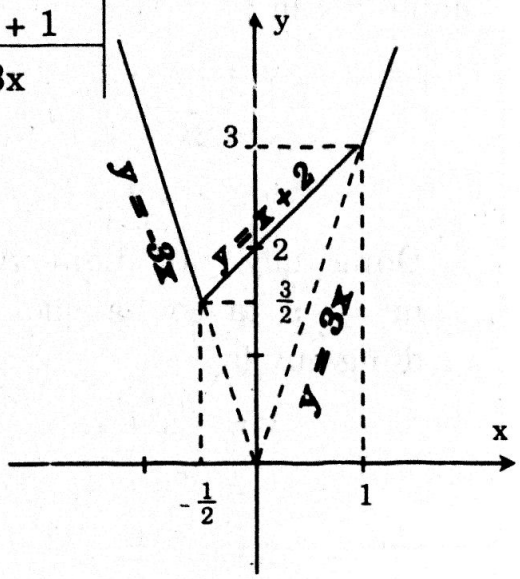
$$|-2x-1| = \begin{cases} -2x-1, \text{ nếu } -2x-1 \geq 0 \text{ hay } x \leq -\frac{1}{2}, \\ 2x+1, \text{ nếu } x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Từ đó ta lập bảng tương ứng trên các khoảng như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
$\|-2x-1\|$	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$	
y	$-3x$	$x+2$	$3x$	

Vậy ta có:

$$y = |x-1| + |-2x-1| = \begin{cases} -3x, \text{ nếu } x \leq -\frac{1}{2}, \\ x+2, \text{ nếu } -\frac{1}{2} < x < 1, \\ 3x, \text{ nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

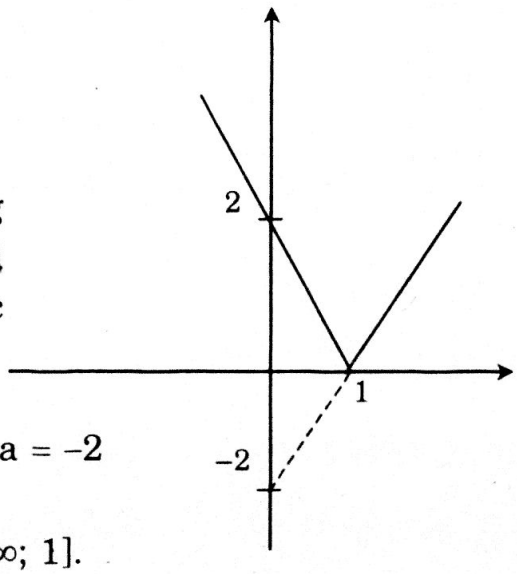


b) Đồ thị hàm số xem hình trên

VẤN ĐỀ 6: Xác định hàm số $y = |ax + b|$ theo đồ thị là một đường gấp khúc đã cho.

Phương pháp: Đường gấp khúc có hai nhánh là hai nửa đường thẳng. Xác định hàm số $y = ax + b$ có đồ thị trên một khoảng là một nửa đường thẳng, rồi lấy trị tuyệt đối. Chú ý rằng không phải đường gấp khúc nào cũng là đồ thị của một hàm số $y = |ax + b|$

Ví dụ 6: Hãy xác định hàm số có đồ thị là đường gấp khúc như trong hình bên.



Giải

Trên nửa khoảng $(-\infty; 1]$, nửa đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(1; 0)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} 2 = a.0 + b \\ 0 = a.1 + b \end{cases} \Rightarrow b = 2, \quad a = -2$$

Vậy ta có hàm số $y = -2x + 2$ trên $(-\infty; 1]$.

Tương tự, trên nửa khoảng $[1; +\infty)$ nửa đường thẳng (kéo dài) đi qua hai điểm $(1; 0)$ và $(0; -2)$ có phương trình là $y = 2x - 2$.

Vậy ta có

$$y = \begin{cases} 2x - 2, \text{ nếu } x \geq 1, \\ -2x + 2, \text{ nếu } x < 1. \end{cases}$$

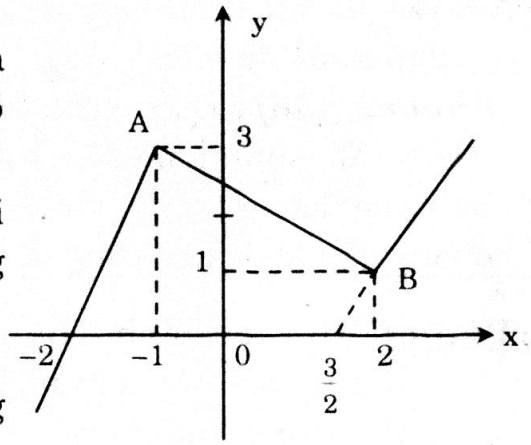
Có thể thấy đây là hàm số $y = |2x - 2|$.

VẤN ĐỀ 7: Xác định hàm số có đồ thị là một đường gấp khúc đã cho.

Phương pháp: Viết phương trình đường thẳng trên mỗi khoảng đã cho rồi hợp lại, ta được hàm số cần tìm.

Ví dụ 7: Tìm hàm số có đồ thị là đường gấp khúc trong hình dưới.

Giải



Trên $(-\infty; -1]$ đường thẳng đi qua hai điểm $(-2; 0)$ và $(-1; 3)$ có phương trình $y = 3x + 6$.

Trên $[-1; 2]$ đường thẳng đi qua hai điểm $(-1; 3)$ và $(2; 1)$ có phương trình $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

Tương tự, trên $[2; +\infty)$ đường thẳng đi qua $(2; 1)$ và $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ có phương trình $y = 2x - 3$

Vậy hàm số có dạng $y = \begin{cases} 3x + 6, \text{ nếu } x \le -1, \\ -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}, \text{ nếu } -1 \le x < 2, \\ 2x - 3, \text{ nếu } x \ge 2. \end{cases}$

C/ LUYỆN TẬP

2.9. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = 5x - 3$; b) $y = -4x + 5$;

c) $y = \left|\frac{1}{3}x\right|$; d) $y = |2x - 4|$.

2.10. Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên mỗi khoảng đã cho:

a) $y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ nếu } x < 2, \\ -x + 3, \text{ nếu } x \ge 2. \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -3x + 1, \text{ nếu } x < 1, \\ 2x - 4, \text{ nếu } x \ge 1. \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2, \text{ nếu } x < 0, \\ -2x + 2, \text{ nếu } x \ge 0. \end{cases}$

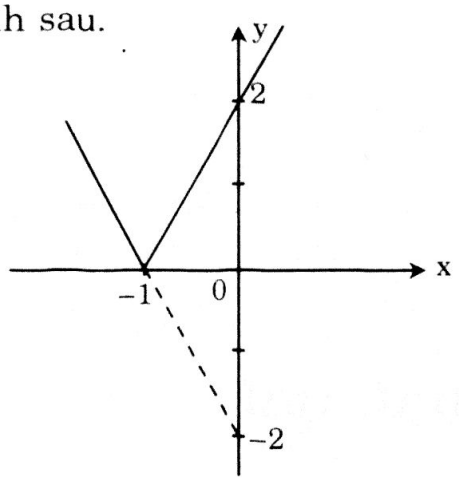
d) $y = \begin{cases} -2x - 6, \text{ nếu } x < -2, \\ 2x + 4, \text{ nếu } -2 \le x < 0, \\ -2x + 4, \text{ nếu } x \ge 0. \end{cases}$

2.11. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

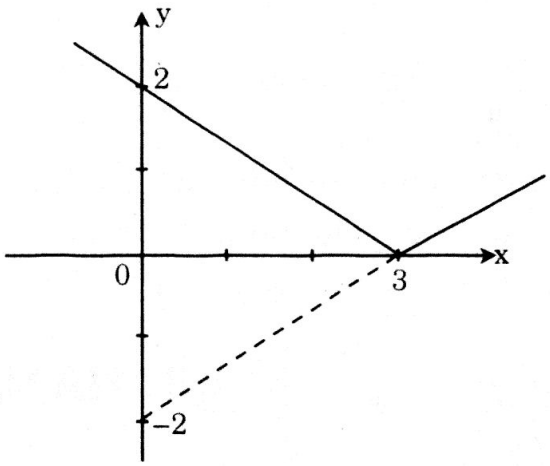
a) $y = |-3x + 6|$; b) $y = |2x - 1|$;

c) $y = |4x + 2|$; d) $y = |-4x - 2|$.

2.12. Hãy xác định các hàm số có đồ thị là các đường gấp khúc trong hình sau.



a)



b)

2.13. Cho hàm số $y = |x + 1| + |-2x + 3|$.

a) Tìm công thức xác định hàm số trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $\left(-1; \frac{3}{2}\right]$, $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

b) Vẽ đồ thị hàm số

2.14. Cho các hàm số $y = -2x + 1$ và $y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số đó.

b) Tìm giao điểm của hai đồ thị

2.15. a) Xác định a và b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 3x$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = -\frac{3}{2}x + 3$

b) Vẽ cả ba đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ

2.16. a) Xác định m để các đường thẳng sau đồng quy:

$$y = -2x + 2,\ y = mx - 3 \text{ và } y = -\frac{1}{2}x - 2m$$

b) Với mỗi giá trị m tìm được, hãy vẽ các đường thẳng tương ứng trên cùng một hệ trục tọa độ.

2.17. Cho hàm số $y = |-x + 2| - |2x - 1|$

a) Tìm công thức xác định hàm số trên các khoảng $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2} ; 2\right)$ và $[2; +\infty)$

b) Vẽ đồ thị của hàm số

2.18. Cho hàm số $y = |-x + 1| + |2x + 2|$

a) Vẽ đồ thị hàm số

b) Tìm giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = -x + 2$.

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Hàm số bậc hai có dạng $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Tập xác định là $D = \mathbb{R}$

2. Nếu $a > 0$ hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty ; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a} ; +\infty\right)$

3. Nếu $a < 0$ hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty ; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a} ; +\infty\right)$.

4. Bảng biến thiên (với $\Delta = b^2 - 4ac$)

$a > 0$

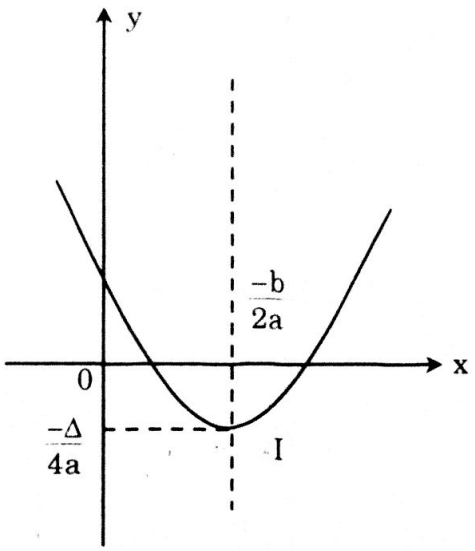
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

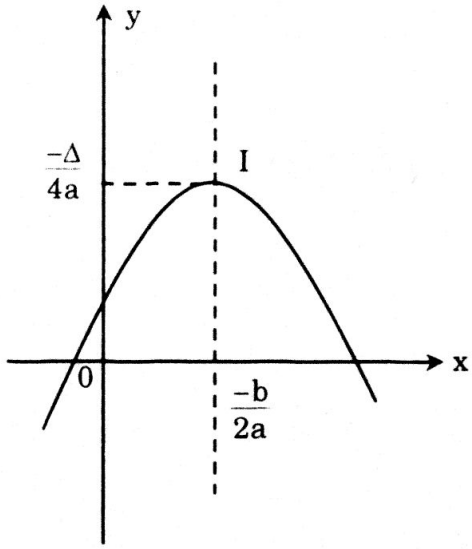
$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Với $a > 0$ giá trị $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị cực tiểu của hàm số, với $a < 0$ giá trị $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị cực đại của hàm số.

5. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.





6. Nếu $\Delta > 0$ đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ và $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Nếu $\Delta = 0$ đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{2a}$

Nếu $\Delta < 0$ đồ thị không cắt trục hoành

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc hai.

Phương pháp: Để xét sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ta tìm tọa độ của đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ rồi lấp vào bảng biến thiên tương ứng với trường hợp $a > 0$ hay $a < 0$.

Để vẽ đồ thị của hàm số bậc hai, ta cũng tìm tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Lúc đó đồ thị có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Sau đó ta chỉ cần tìm một vài điểm ở một nhánh của đồ thị để vẽ tương đối chính xác nhánh đó rồi lấy đối xứng nhánh này qua đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y= 2x^2 - 7x + 5$; b) $y = -x^2 + 3x - \frac{9}{4}$;

c) $y = x^2 + 4x + 5$; d) $y = -3x^2 + 5x + 2$.

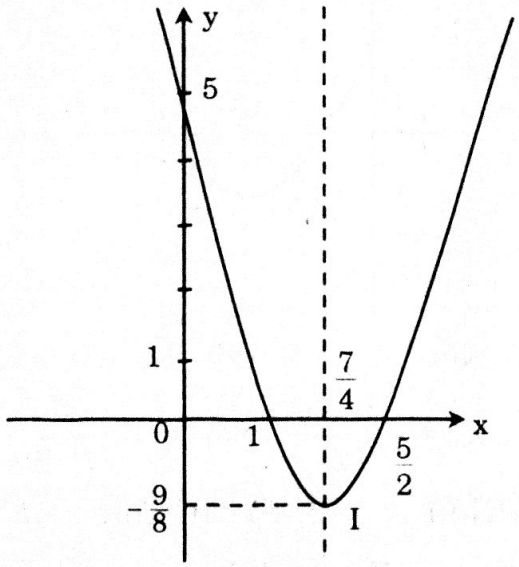
Giải

a) Tọa độ của đỉnh là $I\left(\frac{7}{4} ; -\frac{9}{8}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm (0; 5) và cắt trục hoành tại hai điểm (1; 0) và $\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$, có trục đối xứng là $x = \frac{7}{4}$

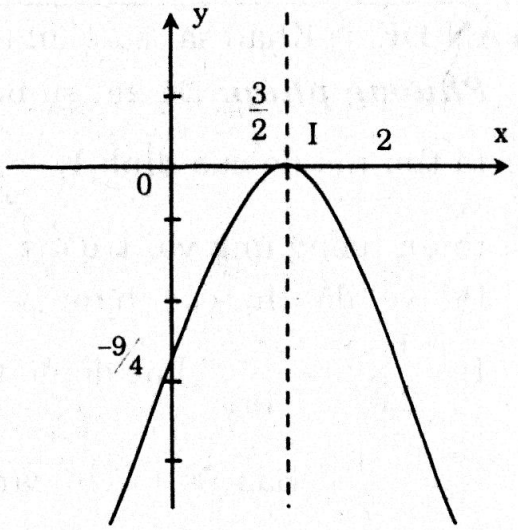


b) Tọa độ của đỉnh là $I\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0 ; -\frac{9}{4}\right)$ và tiếp xúc với trục hoành tại điểm $\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$. Đồ thị có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2}$

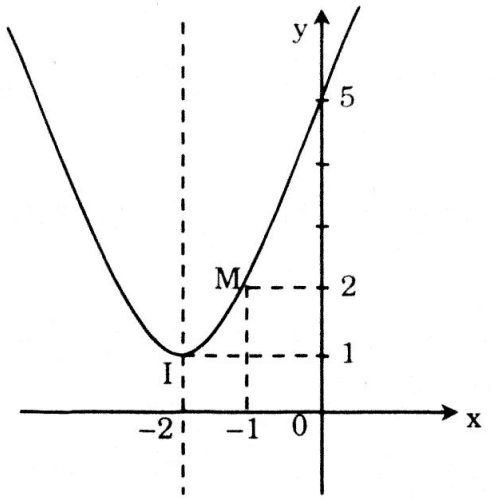


c) Tọa độ của đỉnh là I(−2; 1)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm (0; 5), không cắt trục hoành, nhận đường thẳng x = −2 làm trục đối xứng và đi qua điểm M(−1; 2)

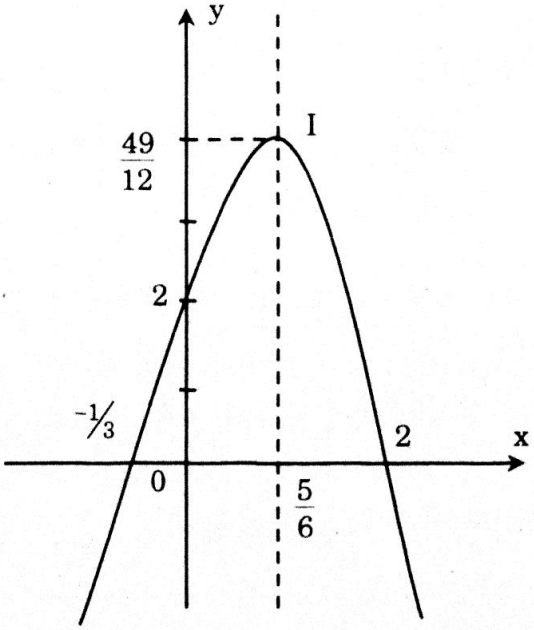


d) Tọa độ của đỉnh là $I\left(\frac{5}{6}\ ;\ \frac{49}{12}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{49}{12}$	↘	$-\infty$

Đồ thị nhận đường thẳng $x = \frac{5}{6}$ làm trục đối xứng cắt trục tung tại điểm (0; 2), cắt trục hoành tại hai điểm $\left(-\frac{1}{3}\ ;\ 0\right)$ và (2; 0)



VẤN ĐỀ 2: Tìm giao điểm của đồ thị hàm bậc hai và đồ thị hàm bậc nhất.

Phương pháp: Muốn tìm giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ và đồ thị hàm số $y = px + q$ ta cho y bằng nhau để được một phương trình theo x gọi là phương trình hoành độ giao điểm. Nghiệm của phương trình này là hoành độ các giao điểm. Nói chung có thể có hai giao điểm, hoặc hai đường tiếp xúc tại một điểm hoặc không có giao điểm nào.

Ví dụ 2: Tìm giao điểm của đồ thị các cặp hàm số sau:

a) $y = x^2 - 2x + 2$ và $y = \frac{1}{2}x + 1$;

b) $y = x^2 + 2x - 2$ và $y = 4x - 3$;

c) $y = 2x^2 + x + 3$ và $y = -2x + 1$.

Giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{2}x + 1$$

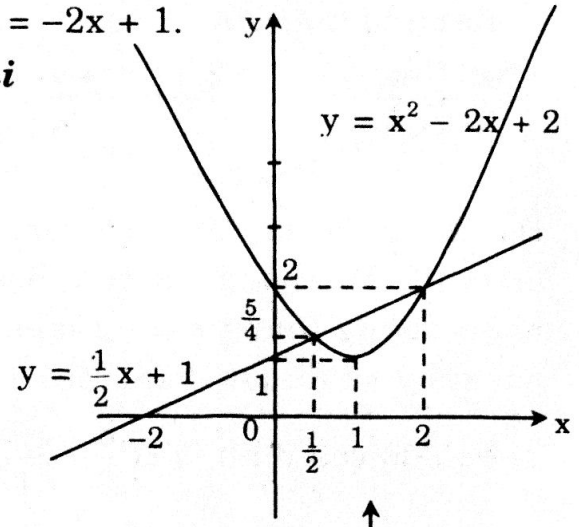
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta có hai giao điểm là

$A(2; 2)$ và $B\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{4}\right)$

Đồ thị xem hình bên



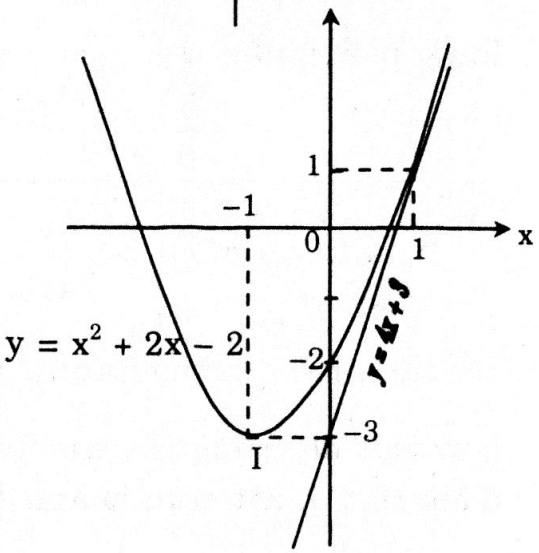
b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$x^2 + 2x - 2 = 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm (1; 1)

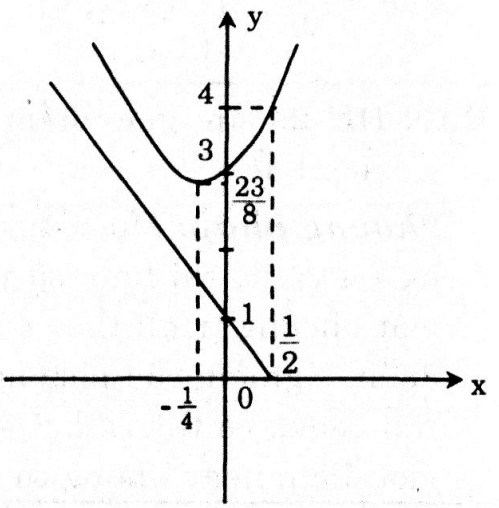


c) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$2x^2 + x + 3 = -2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

Phương trình này vô nghiệm nên hai đồ thị không có giao điểm.

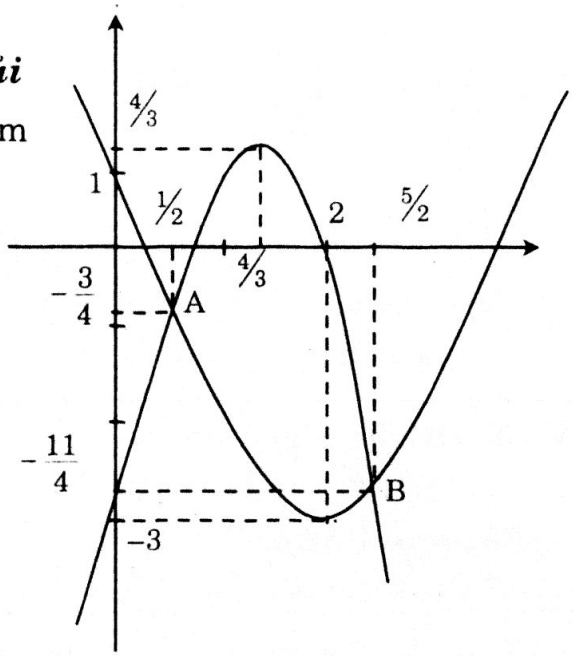


VẤN ĐỀ 3: Tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số bậc hai

Phương pháp: Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol.

Ví dụ 3: Tìm các giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ và $y = -3x^2 + 8x - 4$

Giải



Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$x^2 - 4x + 1 = -3x^2 + 8x - 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta có hai giao điểm là

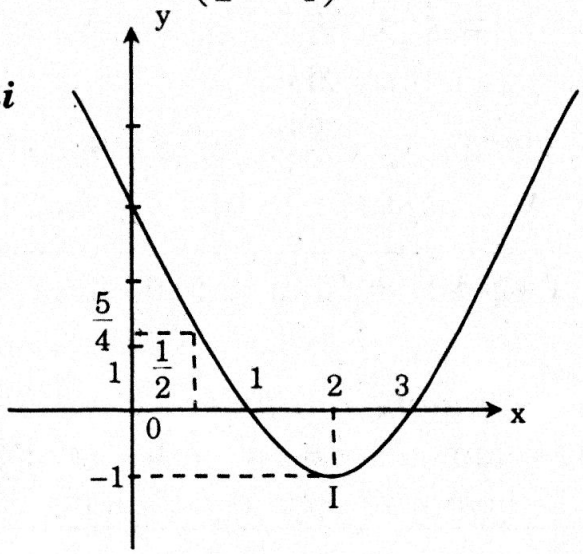
$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right) \text{ và } B\left(\frac{5}{2}; -\frac{11}{4}\right).$$

VẤN ĐỀ 4: Tìm hàm số bậc hai biết tọa độ đỉnh và một điểm thuộc đồ thị.

Phương pháp: Để tìm hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ta cần ba hệ thức để xác định các hệ số a, b, c. Khi cho tọa độ đỉnh, ta có hai hệ thức và khi cho tọa độ một điểm thuộc đồ thị ta có thêm một hệ thức nữa.

Ví dụ 4: Tìm hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị của hàm số có đỉnh là I(2; –1) và đi qua điểm $M\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{4}\right)$. Vẽ đồ thị hàm số đó.

Giải



Ta có các hệ thức

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -1 \\ \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + c = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a & (1) \\ c - \dfrac{b^2}{4a} = -1 & (2) \\ a + 2b + 4c = 5 & (3) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra $c = \dfrac{5 - a - 2b}{4} = \dfrac{5 + 7a}{4}$

Thay b và c vào (2) ta được a = 1, suy ra b = –4, c = 3. Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 - 4x + 3$

VẤN ĐỀ 5: Tìm hàm số bậc hai biết đồ thị của nó nhận đường thẳng $x = x_0$ làm trục đối xứng và đi qua hai điểm đã cho.

Phương pháp: Tương tự vấn đề 4, ở đây ta cũng có ba hệ thức để xác định các hệ số a, b, c của hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Ví dụ 5: Tìm hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}$ làm trục đối xứng và đi qua hai điểm A(0; –3), B(2; 1). Vẽ đồ thị hàm số.

Giải

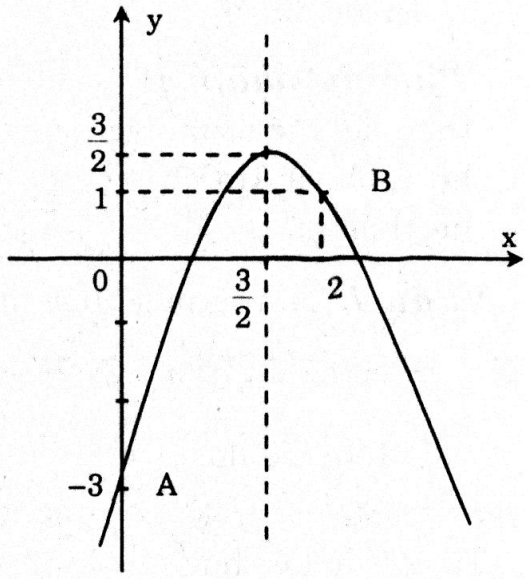
Ta có các hệ thức

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2} \\ c = -3 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = -3 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases}$$

Từ đó suy ra a = –2, b = 6, c = –3.

Vậy hàm số cần tìm là $y = -2x^2 + 6x - 3$.



VẤN ĐỀ 6: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = |ax^2 + bx + c|.$$

Phương pháp: Trước hết khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Phần đồ thị hàm số nằm dưới trục hoành sẽ được lấy đối xứng đối với trục hoành.

Ví dụ 6.1: Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x^2 - x - 2|$

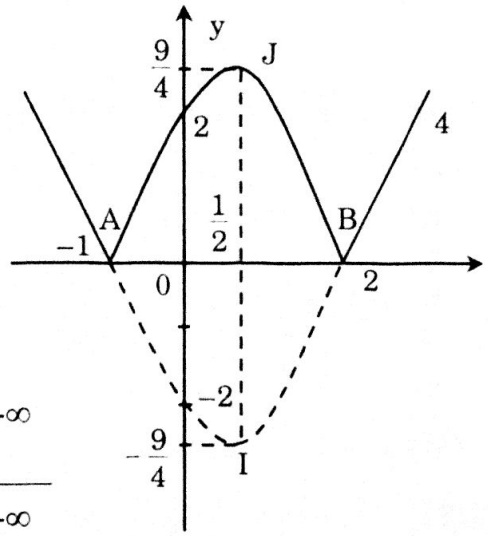
Giải

Trước hết xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$.

Tọa độ đỉnh là $I\left(\frac{1}{2} ; -\frac{9}{4}\right)$. Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm A(−1; 0) và B(2; 0).

Bảng biến thiên chi tiết như sau

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$



Phần đồ thị AIB (vẽ chấm chấm trên hình) lấy đối xứng qua trục hoành được AJB, trong đó J là điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{2} ; \frac{9}{4}\right)$

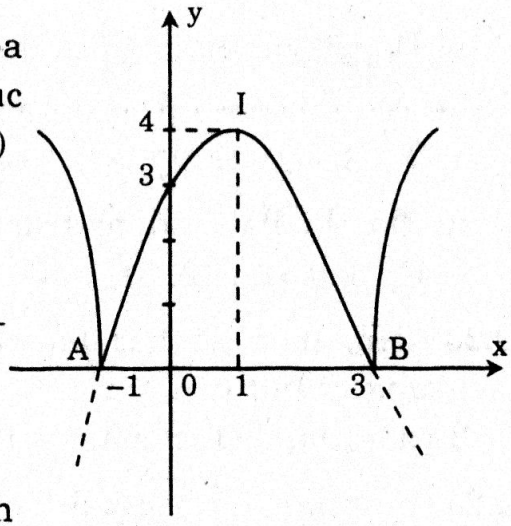
Ví dụ 6.2: Vẽ đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 2x + 3|$.

Giải

Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$. Tọa độ đỉnh là I(1; 4). Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm A(−1; 0) và B(3; 0)

Bảng biến thiên chi tiết:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	0	↘	$-\infty$



Phần đồ thị AIB nằm trên trục hoành được giữ nguyên, nhánh bên

trái điểm A và nhánh đồ thị bên phải điểm B lấy đối xứng qua trục hoành, được đồ thị như hình vẽ.

C/ LUYỆN TẬP

2.19. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = -4x^2 - 6x + 3$; b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$;

c) $y = -x^2 + x - 1$; d) $y = 2x^2 + 3x + 3$.

2.20. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị các cặp hàm số sau và vẽ các đồ thị đó:

a) $y = 2x^2 - 5x + 2$ và $y = 3x - 4$;

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ và $y = -x + 4$;

c) $y = 4x^2 - 5x + 4$ và $y = x$;

d) $y = -2x^2 + 3x + 2$ và $y = 4x - 1$.

2.21. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị các hàm số bậc hai sau và vẽ các đồ thị đó:

a) $y = -x^2 + 4x - 1$ và $y = 3x^2 - 6x + 3$;

b) $y = 3x^2 - 14x + 12$ và $y = -x^2 + 6x - 13$;

c) $y = 2x^2 - 3x + 1$ và $y = -x^2 + 2x - 3$;

d) $y = 2x^2 - 4x + 3$ và $y = x^2 - 2x - 1$.

2.22. Tìm hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ biết:

a) Đồ thị của hàm số có đỉnh là I(1; 3) và đi qua điểm A(3; −1)

b) Đồ thị của hàm số có đỉnh là I(−1; −1) và đi qua điểm B(−2; 0).

c) Đồ thị hàm số có trục đối xứng là $x = -2$ và đi qua hai điểm A(−3; −2), B(1; 6).

d) Đồ thị hàm số có trục đối xứng là $x = 1$ và đi qua hai điểm C(−1; −4), D(2; 5).

2.23. Tìm hàm số bậc hai biết hàm số đạt cực đại bằng 3 và cắt đường thẳng $y = -3x + 11$ tại các điểm có tung độ tương ứng bằng 2 và −1 vẽ đường thẳng và đồ thị hàm số bậc hai tìm được.

2.24. Tìm hàm số bậc hai biết đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và đi qua hai điểm A(2; 3) và B(3; −2).

2.15. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = |3x^2 - 4x - 7|$; b) $y = |-2x^2 + 3x - 1|$.

Chương III: PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

trong đó f(x) là vế trái, g(x) là vế phải của phương trình (1).

2. Nghiệm của phương trình (1) là một số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là một mệnh đề đúng.

Giải phương trình (1) là tìm tập nghiệm của nó.

Nếu tập nghiệm là tập rỗng, ta nói phương trình vô nghiệm.

3. Điều kiện của phương trình (1) là điều kiện đối với ẩn số x để f(x) và g(x) có nghĩa.

4. Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng).

Hai phương trình tương đương kí hiệu là $\Leftrightarrow$.

5. Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x) \qquad (2)$

có tập nghiệm T_1 chứa tập nghiệm T của phương trình (1) thì ta nói phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1) và kí hiệu là (1) $\Rightarrow$ (2).

6. Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương:

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác không.

7. Khi bình phương hai vế của một phương trình thì ta được một phương trình hệ quả. Sau khi giải phương trình hệ quả, ta phải thử lại nghiệm vào phương trình ban đầu để loại các nghiệm ngoại lai.

8. Ngoài các phương trình một ẩn, còn có các phương trình nhiều ẩn. Nghiệm của một phương trình hai ẩn x, y là một cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn phương trình đó; còn nghiệm của phương trình ba ẩn x, y, z là một bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ thỏa mãn phương trình.

9. Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số.

10. Giải và biện luận phương trình chứa tham số nghĩa là xét xem với giá trị nào của tham số thì phương trình vô nghiệm, có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Tìm điều kiện của một phương trình.

Phương pháp: Nếu phương trình có chứa ẩn ở mẫu thức thì điều kiện là mẫu thức phải khác không. Nếu phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai (hoặc căn bậc chẵn) thì điều kiện là biểu thức dưới dấu căn phải không âm.

Ví dụ 1: Tìm điều kiện của các phương trình:

a) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x-1} = 3$; b) $\dfrac{3x+2}{3x^2-x-2} = 0$

c) $\sqrt{2x^2+5x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 0$; d) $|5x+7| = x$

Giải

a) Điều kiện của phương trình: $x \geq -2$ và $x \neq \dfrac{1}{2}$

b) Điều kiện: $x \neq 1$ và $x \neq -\dfrac{2}{3}$

c) Điều kiện: $2x^2 + 5x - 1 \geq 0$ và $x \neq -1$

d) Không có điều kiện nào cho x. Chú ý đối với bài này chỉ những giá trị $x \geq 0$ mới có thể là nghiệm của phương trình, nhưng đó không phải là điều kiện.

Ghi chú: Từ nay về sau, khi không có điều kiện nào cho x thì ta sẽ không ghi điều kiện của phương trình.

VẤN ĐỀ 2: Từ điều kiện của phương trình suy ra nghiệm của phương trình.

Phương pháp: Có những phương trình, khi viết điều kiện của nó, ta thấy không có giá trị nào của ẩn thỏa điều kiện của phương trình, lúc đó ta kết luận phương trình vô nghiệm. Hoặc khi viết điều kiện của phương trình, ta thấy chỉ có một giá trị của x thỏa mãn điều kiện đó. Thay thế giá trị này vào phương trình, ta biết nó có phải là nghiệm hay không.

Ví dụ 2: Giải các phương trình

a) $\sqrt{x-4} + \sqrt{2-x} = 0$; b) $\dfrac{x+1}{2x^2+3x+1} = 0$

c) $x^2 + \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 9$; d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$

Giải

a) Điều kiện của phương trình: $x - 4 \geq 0$ và $2 - x \geq 0$

hay $x \geq 4$ và $x \leq 2$. Không có giá trị nào của x thỏa mãn điều kiện này. Vậy phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình: $2x^2 + 3x + 1 \neq 0$

hay $x \neq -1$ và $x \neq -\dfrac{1}{2}$

Nhân hai vế với $2x^2 + 3x + 1$ ta được phương trình hệ quả $x + 1 = 0$ hay $x = -1$

Giá trị $x = -1$ không thỏa mãn điều kiện của phương trình nên bị loại. Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện của phương trình: $x - 3 \geq 0$ và $3 - x \geq 0$

hay $x \geq 3$ và $x \leq 3$. Chỉ có giá trị $x = 3$ thỏa mãn điều kiện này. Thay vào phương trình, ta thấy hai vế có giá trị bằng nhau. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

d) Điều kiện của phương trình: $x + 1 > 0$ hay $x > -1$. Nhân hai vế với $\sqrt{x+1}$ ta được phương trình hệ quả $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ hay $x = -2$. Giá trị $x = -2$ không thỏa mãn điều kiện của phương trình nên bị loại. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

VẤN ĐỀ 3: Giải phương trình bằng cách biến đổi về một phương trình hệ quả.

Phương pháp: Nói chung giải phương trình bằng cách biến đổi về phương trình tương đương gặp nhiều khó khăn, nên ta thường biến đổi về phương trình hệ quả. Có hai phép biến đổi hay dùng, đó là phép nhân hai vế với một biểu thức và phép bình phương hai vế.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x-3} = \dfrac{2x^2-4x+1}{\sqrt{5x-3}}$; b) $|x+1| = \dfrac{x}{2}$

c) $2x+1 = \sqrt{7x+8}$; d) $3x - \dfrac{4}{x+2} = \dfrac{2x}{x+2}$

Giải

a) Điều kiện của phương trình: $x > \dfrac{3}{5}$

Ta có : $\sqrt{5x-3} = \dfrac{2x^2-4x+1}{\sqrt{5x-3}}$

$\Rightarrow 5x - 3 = 2x^2 - 4x + 1$

$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 4$ và $x = \dfrac{1}{2}$

Giá trị $x = \dfrac{1}{2}$ không thỏa điều kiện nên bị loại, còn $x = 4$ thỏa mãn phương trình, vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

b) Ta có: $|x+1| = \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow (x+1)^2 = \dfrac{x^2}{4}$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = \dfrac{x^2}{4}$

$\Rightarrow 3x^2 + 8x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ và $x = -\dfrac{2}{3}$.

Cả hai giá trị $x = -2$ và $x = -\frac{2}{3}$ đều không thỏa mãn phương trình đã cho (vế trái dương còn vế phải âm), nên bị loại. Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện của phương trình: $x > -\frac{8}{7}$

Ta có: $2x + 1 = \sqrt{7x + 8}$

$\Rightarrow (2x + 1)^2 = 7x + 8$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 7x + 8$

$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 7 = 0$

$\Rightarrow x = -1$ và $x = \frac{7}{4}$.

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện của phương trình, nhưng khi thay vào phương trình thì giá trị $x = -1$ bị loại (vế trái âm, vế phải dương), do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{7}{4}$.

d) Điều kiện của phương trình: $x \neq -2$

Ta có: $3x - \frac{4}{x+2} = \frac{2x}{x+2}$

$\Rightarrow 3x(x+2) - 4 = 2x$

$\Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ và $x = \frac{2}{3}$

Giá trị $x = -2$ không thỏa mãn điều kiện nên bị loại, giá trị $x = \frac{2}{3}$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2}{3}$.

VẤN ĐỀ 4: Xác định tham số để hai phương trình tương đương.

Phương pháp: Nếu chỉ có một phương trình chứa tham số, ta giải phương trình không chứa tham số, tìm nghiệm rồi thay vào phương trình chứa tham số để tìm giá trị của tham số tương ứng.

Ví dụ 4: Xác định m để các cặp phương trình sau tương đương:

a) $\dfrac{2x+1}{2x^2+x+1} = 1$ và $x^2 + (m-1)x + m - \dfrac{1}{2} = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ và $|x - m| = 2x$

Giải

a) Vì $2x^2 + x + 1 = 2\left(x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right) = 2\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} > 0$

với mọi x nên ta có:

$$\frac{2x+1}{2x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ và } x = \frac{1}{2}$$

Để hai phương trình tương đương thì phương trình thứ hai cũng phải có hai nghiệm $x = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$. Thay $x = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$. vào phương trình thứ hai ta được $m = \dfrac{1}{2}$. Lúc đó phương trình này có dạng.

$$x^2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } x = \frac{1}{2}$$

Vậy với $m = \dfrac{1}{2}$ thì hai phương trình tương đương.

b) Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có một nghiệm $x = 2$. Thay giá trị này vào phương trình thứ hai ta được:

$$|2 - m| = 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 - m = 4 \\ m - 2 = 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 6 \end{bmatrix}$$

Vậy với $m = -2$ hoặc $m = 6$ thì hai phương trình tương đương.

C/ LUYỆN TẬP

3.1. Tìm điều kiện của các phương trình:

a) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{4x+5} = 0$;

b) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2-x} = 1$

c) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 0$;

d) $\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \dfrac{3}{x-2} = 0$

3.2. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{-x-2} = 1$; b) $\dfrac{x+2}{2x^2+3x-2} = 0$

c) $x^2 - \sqrt{x+2} = \sqrt{-x-2} + 4$; d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

3.3. Giải các phương trình:

a) $|x+2| = x-1$; b) $x-1 + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{x+2}{x-2}$

c) $\dfrac{2x^2-7x+2}{\sqrt{5-2x}} = \sqrt{5-2x}$; d) $3x - 2 = \sqrt{3-2x}$

3.4. Các phương trình sau có tương đương không? Tại sao?

a) $\sqrt{(x+2)(x-3)} = 0$ và $\sqrt{x+2}\,.\,\sqrt{x-3} = 0$

b) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x-1}} = 0$ và $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-1}} = 0$

c) $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{3x}{(x-1)^2} = 1$ và $x+2+\dfrac{3x}{x-1} = x-1$

3.5. Xác định tham số m để các cặp phương trình sau tương đương:

a) $\dfrac{3-x}{2x^2+2x+1} = 1$ và $(m+2)x^2 + 2(m+1)x - 2m = 0$

b) $\dfrac{3x^2-7x-6}{x-3} = 0$ và $mx + 2 = 0$

§2 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$

$ax + b = 0$ (1)	
Hệ số	*Kết luận*
$a \neq 0$	(1) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$
$a = 0$ $b \neq 0$	(1) vô nghiệm
$a = 0$ $b = 0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

Khi $a \neq 0$ phương trình $ax + b = 0$ được gọi là phương trình bậc nhất.

2. Giải và biện luận phương trình bậc hai:

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ (2)	
$\Delta = b^2 - 4ac$	*Kết luận*
$\Delta > 0$	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	(2) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	(2) vô nghiệm

Nếu $b = 2b'$ công thức nghiệm là $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$, với $\Delta' = b'^2 - ac$

3. Định lí Viét: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0.\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$. Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

4. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ (2)

Kí hiệu $P = -\dfrac{b}{a}$, $S = \dfrac{c}{a}$, thì ta có:

– Nếu $P < 0$ thì phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu.

– Nếu $P > 0$ và $\Delta \geq 0$ thì phương trình (2) có hai nghiệm cùng dấu. Nếu $S > 0$ thì lúc đó (2) có hai nghiệm dương, còn nếu $S < 0$ thì (2) có hai nghiệm âm.

5. Biểu thức đối xứng của x_1 và x_2 là biểu thức không thay đổi khi ta thay x_1 bởi x_2 và ngược lại. Một biểu thức đối xứng của x_1 và x_2 có thể biểu thị được dưới dạng một biểu thức của S và P, với $S = x_1 + x_2$, $P = x_1x_2$

6. Các trường hợp đặc biệt của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

– Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

– Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

– Nếu $b = c = 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

– Nếu $b \neq 0$, $c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

– Nếu $b = 0$, $c \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm khi $ac > 0$ và có hai nghiệm $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ khi $ac < 0$.

7. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức: cần chú ý điều kiện của phương trình để loại nghiệm ngoại lai nếu cần.

8. Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$ ta đưa về phương trình bậc hai theo t: $at^2 + bt + c = 0$

Một phương trình trùng phương có thể có bốn nghiệm, ba nghiệm, hai nghiệm, một nghiệm, hoặc vô nghiệm.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Giải và biện luận phương trình $|ax + b| = |cx + d|$ (3)

Phương pháp: Có hai cách giải phương trình (3).

Cách 1: Dựa theo định nghĩa của trị tuyệt đối, ta có $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$. Do đó phương trình (3) tương ứng với tập hợp hai phương trình:

$ax + b = cx + d$ và $ax + b = -(cx + d)$. Giải hai phương trình này rồi lấy tất cả các nghiệm.

Cách 2: Vì hai vế của phương trình (3) không âm nên khi bình phương hai vế của (3) ta được một phương trình tương đương. Vì vậy

$$(3) \Leftrightarrow (ax + b)^2 = (cx + d)^2.$$

Ta đưa về một phương trình bậc hai.

Ví dụ 1.1: Giải phương trình $|2x + 3| = |3x - 1|$

Giải

Ta có $|2x + 3| = |3x + 1|$

$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 = (3x - 1)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 9x^2 - 6x + 1$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 18x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ và $x = -\frac{2}{5}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 4$ và $x = -\frac{2}{5}$

Ví dụ 1.2: Giải và biện luận theo tham số m phương trình

$|mx + 1| = |2x - 3m|$

Giải

Ta có

$$|mx + 1| = |2x - 3m| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 1 = 2x - 3m & (a) \\ mx + 1 = -2x + 3m & (b) \end{cases}$$

Giải và biện luận phương trình (a):

(a) $\Leftrightarrow$ $(2 - m)x = 3m + 1$

Nếu $m \neq 2$, phương trình (a) có nghiệm $x = \frac{3m + 1}{2 - m}$

Nếu $m = 2$, phương trình (a) vô nghiệm

Giải và biện luận phương trình (b):

(b) $\Leftrightarrow$ $(m + 2)x = 3m - 1$

Nếu $m \neq -2$, phương trình (b) có nghiệm $x = \frac{3m - 1}{m + 2}$

Nếu $m = -2$, phương trình (b) vô nghiệm

Kết luận:

– Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -2$: phương trình đã cho có hai nghiệm

$x = \frac{3m + 1}{2 - m}$ và $x = \frac{3m - 1}{m + 2}$

– Nếu $m = 2$: phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{5}{4}$

– Nếu $m = -2$: phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{5}{4}$

VẤN ĐỀ 2: Giải và biện luận phương trình $|ax + b| = cx + d$ (4)

Phương pháp: Vấn đề này phức tạp hơn vấn đề 1, vì khi biến đổi ta dẫn đến một phương trình hệ quả. Khử dấu trị tuyệt đối ta có:

– Nếu $ax + b \geq 0$ thì (4) $\Rightarrow ax + b = cx + d$ (4')

– Nếu $ax + b \le 0$ thì (4) $\Rightarrow -ax - b = cx + d$ (4")

Khi giải phương trình (4') và (4") phải thay nghiệm vào để kiểm tra các điều kiện ax + b dương hay âm.

Ví dụ 2.1: Giải phương trình $|3x - 2| = x - 1$

Giải

– Nếu $x \ge \frac{2}{3}$ thì $|3x - 2| = 3x - 2$, nên phương trình đã cho trở thành $3x - 2 = x - 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Giá trị $x = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn điều kiện $x \ge \frac{2}{3}$ nên bị loại.

– Nếu $x < \frac{2}{3}$ thì $|3x - 2| = -3x + 2$, nên phương trình đã cho trở thành $-3x + 2 = x - 1 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Giá trị $x = \frac{3}{4}$ không thỏa mãn điều kiện $x < \frac{2}{3}$ nên bị loại

Kết luận: Phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2.2: Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m:

$|x + m| = 3x - 5m$

Giải

– Nếu $x \ge -m$ thì $x + m \ge 0$, do đó $|x + m| = x + m$ lúc đó phương trình đã cho trở thành

$x + m = 3x - 5m \Rightarrow x = 3m$

Giá trị $x = 3m$ thỏa điều kiện $x \ge -m$ khi và chỉ khi

$3m \ge -m \Leftrightarrow 4m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 0$

– Nếu $x \le -m$ thì $|x + m| = -x - m$, nên phương trình đã cho trở thành $-x - m = 3x - 5m \Rightarrow 4x = 4m \Rightarrow x = m$

Giá trị $x = m$ thỏa điều kiện $x < -m$ khi và chỉ khi

$m < -m \Leftrightarrow 2m < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Kết luận: Từ sự biện luận trong hai trường hợp trên ta rút ra kết luận sau:

Nếu $m \ge 0$ phương trình có nghiệm $x = 3m$

Nếu $m < 0$ phương trình có nghiệm $x = m$

VẤN ĐỀ 3: Giải và biện luận phương trình

$$\frac{ax+b}{cx+d}=0$$

Phương pháp: Điều kiện của phương trình là $cx + d \neq 0$. Vì vậy sau khi giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$, trong mỗi trường hợp là phải thay nghiệm vào biểu thức $cx + d$ xem có bằng 0 hay không, nếu bằng 0 thì phải loại giá trị tìm được.

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m:

$$\frac{(m^2+4m+3)x}{x+1}=2m+6$$

Giải

Điều kiện của phương trình: $x \neq -1$

Ta có:

$$\frac{(m^2+4m+3)x}{x+1}=2m+6$$

$$\Rightarrow (m^2+4m+3)x=(x+1)(2m+6)$$

$$\Rightarrow (m^2+2m-3)x=2m+6$$

$$\Rightarrow (m-1)(m+3)x=2(m+3)\ (*)$$

Giải và biện luận phương trình (*) rồi so sánh với điều kiện $x \neq -1$

Nếu $m = 1$ thì phương trình (*) vô nghiệm

Nếu $m = -3$ thì mọi số thực x đều là nghiệm của (*)

Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -3$ thì (*) có nghiệm duy nhất

$$x=\frac{2}{m-1}$$

So với điều kiện $x \neq -1$ ta thấy:

$$\frac{2}{m-1} \neq -1 \Leftrightarrow 2 \neq -m+1 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Vậy ta có kết luận sau:

– Nếu $m \neq 1$, $m \neq -1$ và $m \neq -3$: phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{2}{m-1}$

– Nếu $m = -3$: mọi số thực $x \neq -1$ đều là nghiệm của phương trình

– Nếu $m = 1$ hoặc $m = -1$: phương trình vô nghiệm.

VẤN ĐỀ 4: Giải và biện luận phương trình $|ax + b| + |cx + d| = m$

Phương pháp: Vẽ đồ thị hàm số $y = |ax + b| + |cx + d|$ như trong chương 2, ta được đồ thị là một đường gấp khúc. Cắt đồ thị bởi đường thẳng $y = m$ ta được các giao điểm. Hoành độ các giao điểm là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4: Giải và biện luận phương trình

$$|2x + 3| + |x - 2| = m$$

Giải

Ta có

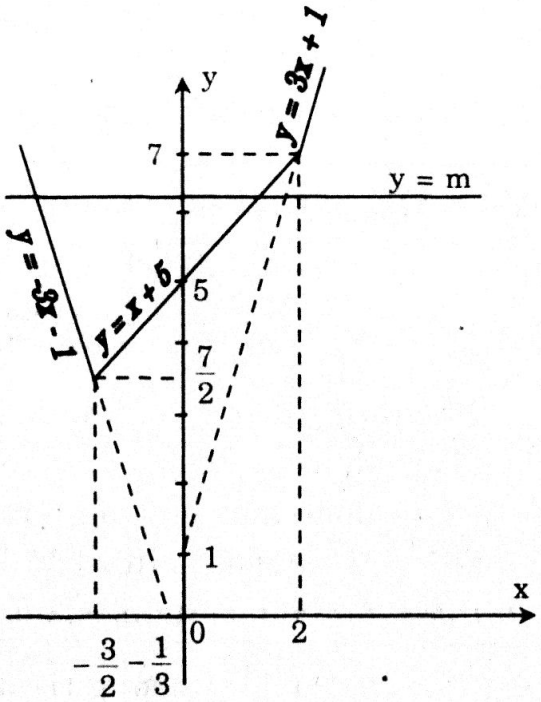
$$2x + 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{3}{2}$$

$$x - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2$$

Vì vậy ta có bảng:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$\|2x + 3\|$	$-2x - 3$	$2x + 3$	$2x + 3$	
$\|x - 2\|$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$	
y	$-3x - 1$	$x + 5$	$3x + 1$	

Vậy $y = \begin{cases} -3x - 1 \text{ nếu } x < -\frac{3}{2} \\ x + 5 \text{ nếu } -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ 3x + 1 \text{ nếu } x \geq 2 \end{cases}$



Đồ thị xem hình bên.

Căn cứ vào đồ thị ta có kết luận sau:

a) $m < \frac{7}{2}$: phương trình vô nghiệm

b) $m = \frac{7}{2}$: phương trình có nghiệm $x = -\frac{3}{2}$

c) $\frac{7}{2} < m < 7$: phương trình có hai nghiệm từ hai phương trình

$$-3x - 1 = m \Rightarrow x = -\frac{m+1}{3}$$

và

$$x + 5 = m \Rightarrow x = m - 5$$

d) $m = 7$: phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và x_2 là nghiệm của phương trình

$$-3x - 1 = 7 \Rightarrow x_2 = -\frac{8}{3}$$

e) $m > 7$: phương trình có hai nghiệm từ hai phương trình

$$-3x - 1 = m \Rightarrow x = -\frac{m+1}{3}$$

và $3x + 1 = m \Rightarrow x = \frac{m-1}{3}$

VẤN ĐỀ 5: Giải các phương trình

$$\sqrt{ax+b} = cx + d \qquad (5)$$

và $$\sqrt{ax^2+bx+c} = dx + e \qquad (6)$$

Phương pháp: Sau khi đặt điều kiện $ax + b \geq 0$ cho phương trình (5) hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$ cho phương trình (6) ta bình phương hai vế để được một phương trình hệ quả là phương trình bậc hai. Sau khi giải phương trinh bậc hai này ta phải kiểm tra điều kiện và thay vào phương trình đã cho để loại nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 5.1: Giải phương trình $\sqrt{4x+3} = 2x - 1$

Giải

Điều kiện của phương trình là $4x + 3 \geq 0$ Ta có

$$\sqrt{4x+3} = 2x - 1$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 3 = (2x - 1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 8x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \; x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Cả hai giá trị x_1, x_2 đều thỏa mãn điều kiện của phương trình, tuy nhiên chỉ có giá trị $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ là nghiệm vì khi thay x_1 vào phương trình ta thấy vế trái dương, còn vế phải âm.

Đáp số: Nghiệm của phương trình là $x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ví dụ 5.2: Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 5x - 1} = 2x + 5$

Giải

Điều kiện của phương trình là $3x^2 + 5x - 1 \geq 0$

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$3x^2 + 5x - 1 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 15x + 26 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = -13$$

Cả hai giá trị x_1, x_2 đều thỏa mãn điều kiện của phương trình, nhưng khi thay vào phương trình ta thấy chỉ có giá trị $x_1 = -2$ là nghiệm.

Đáp số: Nghiệm của phương trình là $x = -2$

VẤN ĐỀ 6: Xác định các hệ số của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi biết một số hệ thức giữa các nghiệm.

Phương pháp: Cách giải chủ yếu là sử dụng định lí Viét, biểu thị $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ rồi thêm một hệ thức giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình, ta sẽ xác định được các hệ số của phương trình.

Ví dụ 6.1: Cho phương trình $x^2 + 2(m + 2)x + m + 4 = 0$.

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trong đó một nghiệm bằng 5 lần nghiệm kia. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có đúng một nghiệm dương?

Giải

a) Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì phải có biệt thức $\Delta' > 0$

Ta có

$$\Delta' = m^2 + 4m + 4 - m - 4 = m^2 + 3m$$

Vậy phải có điều kiện $m^2 + 3m > 0$ (a)

Theo định lí Viét và yêu cầu của bài toán ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+2) \\ x_1 x_2 = m + 4 \\ x_1 = 5x_2 \end{cases}$$

Thay $x_1 = 5x_2$ vào phương trình đầu ta được $x_2 = -\dfrac{m+2}{3}$ và $x_1 = -\dfrac{5}{3}(m+2)$. Thay các kết quả này vào phương trình thứ hai ta được:

$$m + 4 = \frac{5}{9}(m+2)^2 \quad \Rightarrow \quad 5m^2 + 11m - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 = 1,\ m_2 = -\frac{16}{5}$$

Cả hai giá trị m_1 và m_2 tìm được đều thỏa mãn điều kiện (a)

Với $m = 1$ ta có hai nghiệm là $x_1 = -5,\ x_2 = -1$

Với $m = -\dfrac{16}{5}$ ta có hai nghiệm $x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{2}{5}$

b) Phương trình bậc hai có đúng một nghiệm dương xảy ra trong các trường hợp sau:

– Phương trình có nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 > 0$

– Phương trình có nghiệm $x_1 < 0$ và $x_2 > 0$

– Phương trình có nghiệm kép dương

• Phương trình có nghiệm $x = 0$ khi $m + 4 = 0$ tức $m = -4$. Lúc đó phương trình trở thành

$$x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Vậy giá trị $m = -4$ thỏa mãn điều kiện bài toán

• Phương trình có một nghiệm âm một nghiệm dương khi $\dfrac{c}{a} < 0$, tức là

$$m + 4 < 0 \Rightarrow m < -4$$

• Phương trình có nghiệm kép dương khi $\Delta' = 0$ và $-\frac{b}{2a} > 0$ Ta có

$$\Delta' = m^2 + 3m = m(m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } m = -3$$

$$-\frac{b}{2a} = -m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -2$$

Vậy giá trị $m = -3$ thỏa mãn điều kiện $m < -2$, còn giá trị $m = 0$ bị loại.

Kết luận: Với $m \leq -4$ hoặc $m = -3$ thì phương trình có đúng một nghiệm dương.

***Ví dụ 6.2**:* Cho phương trình

$$(m + 2)x^2 - 3mx + m - 2 = 0$$

Xác định m để:

a) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1^2 + x_2^2 = 2$

b) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $2x_1 + x_2 = 3$

Giải

a) Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $\Delta \geq 0$

Ta có: $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

$$\Delta = 9m^2 - 4(m^2 - 4) = 5m^2 + 16 > 0, \forall m$$

Theo định lí Viét ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{3m}{m+2}$$

$$x_1x_2 = \frac{m-2}{m+2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9m^2}{(m+2)^2} - \frac{2(m-2)}{m+2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 2(m^2 - 4) = 2(m + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ và } m = \frac{8}{5}$$

Hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $m \neq -2$.

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = \frac{8}{5}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1^2 + x_2^2 = 2$

b) Từ hai phương trình $x_1 + x_2 = \dfrac{3m}{m+2}$ và $2x_1 + x_2 = 3$

ta suy ra

$$x_1 = 3 - \frac{3m}{m+2} = \frac{6}{m+2},\ x_2 = \frac{3m-6}{m+2}$$

Từ hệ thức $x_1x_2 = \dfrac{m-2}{m+2}$ ta suy ra:

$$\frac{6}{m+2}\cdot\frac{3m-6}{m+2} = \frac{m-2}{m+2} \Rightarrow 18(m-2) = (m-2)(m+2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ 18 = m+2 \end{array}\right. \Rightarrow \quad m = 16$$

Vậy với $m = 2$ hoặc $m = 16$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $2x_1 + x_2 = 3$

C/ LUYỆN TẬP

3.6. Giải và biện luận các phương trình sau theo các tham số m, a, b:

a) $3x + m = (m^2 - 2m)x - 1$

b) $(4 + m)x + m^2 = m(2m + 3)x - m + 2$

c) $ax + 3b = 3x + 2a$

d) $\dfrac{x}{a-1} - \dfrac{2a+x}{3} = \dfrac{x-2b}{6}$

3.7. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $\dfrac{(2m+3)x+m}{x+2} = m - 2$

b) $\dfrac{(m^2+3m+9)x-m^2}{1-x} = 2m - 3$

c) $\dfrac{(2m+1)x-3}{x-m} = 3$

d) $\dfrac{(3m-2)x+m}{x+2m} = 4$

3.8. Giải các phương trình

a) $|2x + 3| = |3x - 4|$

b) $|5x - 3| = |4x - 1|$

c) $|3x - 2| = 2x - 1$

d) $|4x + 3| = 3x - 4$

3.9. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m.

a) $|2x + 5m| = |mx - 3|$

b) $|2mx - 1| = |m^2x + 2|$

c) $|x - 2m| = 3x - m$

d) $|4x + 3| = 2mx - 3$

3.10. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x + 1| + |2x - 1|$

b) Căn cứ vào đồ thị giải và biện luận phương trình sau theo tham số m:

$$|x + 1| + |2x - 1| = m$$

3.11. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |2x + 2| + |3x - 2|$

b) Căn cứ vào đồ thị hàm số, giải và biện luận phương trình sau theo tham số m:

$$|2x + 2| + |3x - 2| = m$$

3.12. Giải các phương trình

a) $3x^2 - 5x - 3 = 0$; b) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

c) $x^2 - 3|x| + 1 = 0$; d) $x^2 + 2|x - 1| - 3 = 0$

3.13. Giải các phương trình

a) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$; b) $3x^4 + 4x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 4x^2 + 1 = 0$; b) $5(x - 1)^4 + 7x^2 - 14x + 1 = 0$

3.14. Giải các phương trình

a) $\sqrt{4x + 2} = 2x - 3$; b) $\sqrt{3x - 1} = x + 2$

c) $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = 2x + 1$; d) $\sqrt{2x^2 + 5x + 2} = 3x + 2$

3.15. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $(m + 1)x^2 - 3mx + m - 2 = 0$

b) $(2m - 1)x^2 + 4mx + 2m + 3 = 0$

c) $(m - 3)x^2 - 2(m - 2)x + 4 = 0$

d) $(m - 1)x^2 + 2(2m - 1)x + 4m + 3 = 0$

3.16. Cho phương trình bậc hai $3x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 6 = 0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Với những giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm âm?

c) Có giá trị nào của m làm cho phương trình có hai nghiệm dương không?

d) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1 = 3x_2$. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.

3.17. Cho phương trình $(3 - m)x^2 + 2mx - m - 2 = 0$

Xác định m để:

a) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $2x_1 + 3x_2 = 2$

b) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 3$

3.18. Cho hai parabol $y = x^2 - (2a + 1)x - 2$ và $y = (a^2 + 1)x^2 + 4x - 1$

a) Vẽ hai parabol trên cùng một hệ trục tọa độ khi a = 1

b) Xác định a để hai parabol cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

3.19. Cho parabol $y = -3x^2 + 4x - 1$ và đường thẳng Δ: $y = ax + 2$

Xác định a để Δ tiếp xúc với parabol. Vẽ parabol và Δ trong trường hợp đó.

3.20. Cho phương trình $mx^2 - (m + 1)x - m^2 + 1 = 0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1^3 + x_2^3 < 0$.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ BA ẨN

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng

$$ax + by = c \qquad (1)$$

trong đó a và b không đồng thời bằng không.

2. Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$: Tập nghiệm của phương trình (1) là

$$T = \left\{\left(x ; \frac{c - ax}{b}\right) | x \in R\right\} \text{ hay } T = \left\{\left(\frac{c - by}{a} ; y\right) | y \in R\right\}$$

3. Nếu $a = 0$, $b \neq 0$: Tập nghiệm của phương trình (1) là

$$T = \left\{\left(x ; \frac{c}{b}\right) | x \in R\right\}$$

4. Nếu $a \neq 0$, $b = 0$: Tập nghiệm của phương trình (1) là

$$T = \left\{\left(\frac{c}{a} ; y\right) | y \in R\right\}$$

5. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy mà tọa độ là nghiệm của phương trình (1) là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $ax + by = c$. Lúc đó ta cũng nói đường thẳng này biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình (1).

II. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

6. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Trong đó a_1 và b_1 không đồng thời bằng 0, a_2 và b_2 không đồng thời bằng 0.

7. Kí hiệu các định thức cấp hai

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

8. Giải và biện luận hệ phương trình (2):

– Nếu $D \neq 0$, hệ (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

– Nếu $D = 0$, hệ (2) vô nghiệm khi $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$

– Nếu $D = D_x = D_y = 0$ hệ (2) có vô số nghiệm.

9. Ý nghĩa hình học của tập nghiệm

Mỗi phương trình của hệ (2) là phương trình của một đường thẳng. Hệ (2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hai đường thẳng cắt nhau.

Hệ (2) vô nghiệm khi hai đường thẳng song song, hệ (2) có vô số nghiệm khi hai đường thẳng trùng nhau.

III. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

10. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad (3)$$

11. Cách giải hệ phương trình (3) là khử dần ẩn số, bằng phép cộng đại số hoặc phép thế.

Nếu đưa được về dạng tam giác, tức là dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ by + cz = d \\ c'z = d' \end{cases}$$

thì từ phương trình thứ ba ta giải ra $z = \dfrac{d'}{c'}$, rồi thay vào phương trình thứ hai tính được y và thay vào phương trình thứ nhất tính được x.

12. Có thể dùng máy tính bỏ túi để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và ba ẩn. Chẳng hạn, nếu dùng máy tính CASIO fx–500MS để giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn thì ấn liên tiếp các phím.

MODE MODE 1 3 rồi nhập các hệ số a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 lần lượt theo yêu cầu của máy. Máy sẽ cho đáp số x, y, z (gần đúng với số chữ số thập phân theo quy định).

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

***Phương pháp*:** Tính định thức D, D_x, D_y rồi xét hai trường hợp:

– $D \neq 0$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất

– $D = 0$: tính những giá trị của tham số làm cho $D = 0$. Thay từng giá trị đó vào D_x và D_y xem chúng có bằng không hay

không. Nếu $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm. Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm, là tập nghiệm của một trong hai phương trình của hệ.

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m:

$$\begin{cases} 2mx + (3m + 6)y = 3m + 2 \\ (m + 1)x + (2m + 5)y = 2m + 2 \end{cases}$$

Giải

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 2m & 3m+6 \\ m+1 & 2m+5 \end{vmatrix} = 2m(2m + 5) - (m + 1)(3m + 6)$$

$$= m^2 + m - 6 = (m - 2)(m + 3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3m+2 & 3m+6 \\ 2m+2 & 2m+5 \end{vmatrix} = (3m + 2)(2m + 5) - (2m + 2)(3m + 6) =$$

$$= m - 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2m & 3m+2 \\ m+1 & 2m+2 \end{vmatrix} = 2m(2m + 2) - (m + 1)(3m + 2)$$

$$= m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2)$$

– Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -3$ thì $D \neq 0$. Lúc đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) với

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{m+3}; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{m+1}{m+3}$$

– Nếu $m = 2$ thì $D = D_x = D_y = 0$. Lúc đó hệ phương trình có vô số nghiệm (x; y) là nghiệm của phương trình

$$4x + 12y = 8 \qquad \text{hay} \qquad x + 3y = 2$$

Cho $y \in R$ tùy ý thì $x = 2 - 3y$.

– Nếu $m = -3$ thì $D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm.

Kết luận: $m \neq 2$ và $m \neq -3$: hệ có nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{1}{m+3}; \frac{m+1}{m+3}\right)$$

$m = 2$: Tập nghiệm của hệ phương trình là

$$T = \{(2 - 3y ; y) \mid y \in R\}$$

$m = -3$: Hệ phương trình vô nghiệm

VẤN ĐỀ 2: Xác định các hệ số của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để hệ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

Phương pháp: Muốn cho hệ phương trình vô nghiệm, ta phải tìm các hệ số sao cho D = 0 và một trong các định thức D_x, D_y khác 0. Muốn cho hệ phương trình có vô số nghiệm ta phải tìm các hệ số sao cho $D = D_x = D_y = 0$.

Ví dụ 2.1: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + (4m+3)y = m + 2 \\ (2m-1)x + (7m+4)y = m + 4 \end{cases}$$

a) Xác định m để hệ phương trình vô nghiệm

b) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có vô số nghiệm? Lúc đó đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình có đi qua điểm M(1; –2) không?

Giải

a) Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 4m+3 \\ 2m-1 & 7m+4 \end{vmatrix} = m(7m+4) - (2m-1)(4m+3)$$

$$= -m^2 + 2m + 3 = (m+1)(3-m)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+2 & 4m+3 \\ m+4 & 7m+4 \end{vmatrix} = (m+2)(7m+4) - (m+4)(4m+3)$$

$$= 3m^2 - m - 4 = (m+1)(3m-4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 2m-1 & m+4 \end{vmatrix} = m(m+4) - (2m-1)(m+2)$$

$$= -m^2 + m + 2 = (m+1)(2-m)$$

Vậy nếu m = 3 thì D = 0, còn $D_x = 20$, $D_y = -4$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

b) Theo câu a) ta thấy với m = –1 thì $D = D_x = D_y = 0$ nên lúc đó hệ phương trình có vô số nghiệm.

Với m = –1 hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ -3x - 3y = 3 \end{cases}$$

Vậy các nghiệm (x; y) của hệ phương trình là tọa độ các điểm thuộc đường thẳng $-x - y = 1$ hay $y = -x - 1$. Đường thẳng này đi qua điểm M(1; −2)

Ví dụ 2.2: Cho hệ phương trình với hai tham số a, b:

$$\begin{cases} 3ax + ay = a + b \\ (3a + b)x + (a - b)y = a \end{cases}$$

a) Với giá trị nào của a và b thì hệ phương trình đã cho là một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn?

b) Với giá trị nào của a và b thì hệ phương trình bậc nhất hai ẩn đó có vô số nghiệm? Có trường hợp nào hệ phương trình bậc nhất đó vô nghiệm không?

Giải

a) Muốn cho hệ phương trình đã cho là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn thì hệ số của x và y trong mỗi phương trình phải không đồng thời bằng 0.

Từ phương trình thứ nhất ta suy ra được điều kiện $a \neq 0$.

Hệ số của x và y trong phương trình thứ hai bằng 0 khi và chỉ khi

$$3a + b = a - b = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Vậy với $a \neq 0$ (b tùy ý) thì hệ phương trình đã cho là một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Với điều kiện $a \neq 0$ ta xét:

$$D = \begin{vmatrix} 3a & a \\ 3a + b & a - b \end{vmatrix} = 3a(a - b) - a(3a + b) = -4ab.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a + b & a \\ a & a - b \end{vmatrix} = (a + b)(a - b) - a^2 = -b^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3a & a + b \\ 3a + b & a \end{vmatrix} = 3a^2 - (3a + b)(a + b) = -b(4a + b)$$

Với $b = 0$ thì $D = D_x = D_y = 0$. Lúc đó hệ phương trình có vô số nghiệm.

Nếu $b \neq 0$ thì $D \neq 0$ (vì đã có $a \neq 0$), do đó phương trình có nghiệm duy nhất. Vậy không có trường hợp nào hệ phương trình bậc nhất này vô nghiệm.

VẤN ĐỀ 3: Xét sự tương giao của hai đường thẳng trong mặt phẳng.

Phương pháp: Hai phương trình của hai đường thẳng lập thành một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Nếu hệ phương trình đó có nghiệm duy nhất thì hai đường thẳng cắt nhau; nếu hệ đó vô nghiệm thì hai đường thẳng song song, còn nếu hệ đó có vô số nghiệm thì hai đường thẳng trùng nhau.

Ví dụ 3: Xét sự tương giao của các cặp đường thẳng sau và vẽ chúng trong mặt phẳng tọa độ:

a) (Δ_1): $3x - y = 3$; (Δ_2): $x - 2y = -4$

b) (d): $4x - 3y = 4$; (d'): $-8x + 6y = 8$

c) (Δ): $-3x + 9y = -6$; (Δ'): $x - 3y = 2$

Giải

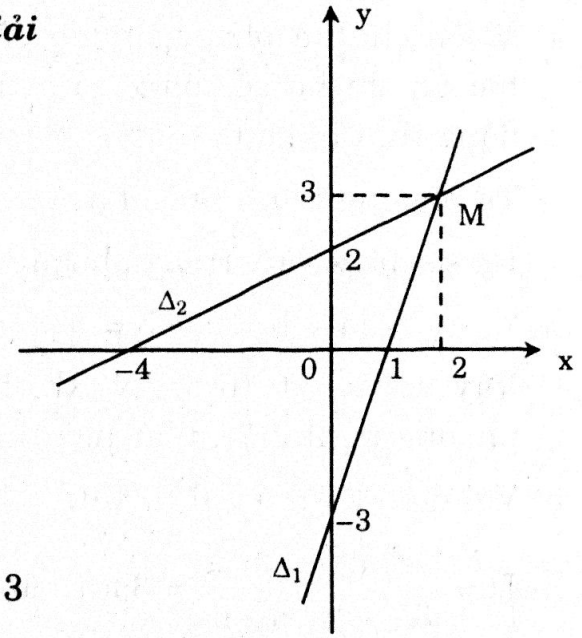
a) Hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

có $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -10$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -15$

Do đó $x = \dfrac{D_x}{D} = 2$, $y = \dfrac{D_y}{D} = 3$



Vậy Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm M(2; 3)

b) Hệ phương trình $\begin{cases} 4x - 3y = 4 \\ -8x + 6y = 8 \end{cases}$

có $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm, suy ra d // d'

c) Hệ phương trình $\begin{cases} -3x + 9y = -6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

có $D = D_x = D_y = 0$ Vậy Δ trùng với Δ'

VẤN ĐỀ 4: Giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn.

Phương pháp: Biến đổi để đưa hệ phương trình đã cho về dạng tam giác bằng cách khử ẩn x ở phương trình thứ hai và phương trình thứ ba, rồi khử ẩn y.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ -2x - y + 3z = -7 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 rồi cộng với phương trình thứ hai, nhân hai vế của phương trình thứ nhất với (–3) rồi cộng với phương trình thứ ba, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 5y + 7z = 1 \\ -8y - 7z = -10 \end{cases}$$

Nếu muốn khử ẩn y ở phương trình thứ ba thì ta nhân phương trình thứ hai với 8 và nhân phương trình thứ ba với 5 sẽ được hệ số của y ở hai phương trình đối nhau, khi cộng hai phương trình sẽ khử được ẩn y.

Tuy nhiên trường hợp này ta thấy hệ số của z trong hai phương trình cuối đối nhau, nên nếu cộng hai phương trình cuối ta sẽ khử được z. Ta được hệ

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 5y + 7z = 1 \\ -3y = -9 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối ta được y = 3, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$7z = 1 - 5y = 1 - 15 = -14 \Rightarrow z = -2.$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta tính được x = –1.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x; y; z) = (–1; 3; –2)

VẤN ĐỀ 5: Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ khi biết đồ thị của nó đi qua ba điểm.

Phương pháp: Thay tọa độ của ba điểm đã cho vào công thức $y = ax^2 + bx + c$ ta sẽ có một hệ ba phương trình bậc nhất cho ba ẩn a, b, c. *Giải* hệ phương trình này ta sẽ xác định được hàm số.

Ví dụ 5: Xác định và vẽ đồ thị hàm số bậc hai, biết đồ thị đó đi qua ba điểm

$A(1; -6), B(-2; 9), C(3; 4)$

Giải

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(1; -6)$, $B(-2; 9)$ và $C(3; 4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a + b + c = -6 \\ 4a - 2b + c = 9 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}$$

Nhân phương trình thứ nhất với -1 rồi cộng vào hai phương trình sau, ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = -6 \\ 3a - 3b = 15 \\ 8a + 2b = 10 \end{cases}$$

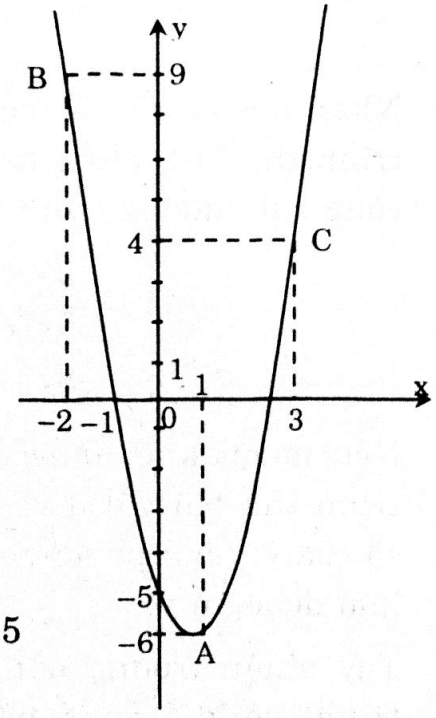
Từ phương trình thứ hai ta suy ra $a = b + 5$

Thay vào phương trình cuối ta được

$10b + 40 = 10 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a = 2, c = -5$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - 3x - 5$

Đồ thị của hàm số xem hình bên.



VẤN ĐỀ 6: Giải toán bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất.

Phương pháp: Để giải toán bằng cách lập hệ phương trình, ta phải chọn ẩn thích hợp cùng với các điều kiện (nếu có) của các ẩn. Dựa vào các giả thiết của bài toán để lập các phương trình tương ứng và giải ra nghiệm rồi so với điều kiện.

Ví dụ 6: Một đoàn du khách đi tàu biển cập bến Đà Nẵng, gồm 600 khách với 3 quốc tịch Nhật Bản, Trung Quốc và Mỹ. Biết rằng ba lần số du khách Nhật hơn hai lần tổng số du khách Mỹ và Trung Quốc là 150 người, còn tổng số du khách Nhật và Trung Quốc thì bằng ba lần số du khách Mỹ. Hỏi mỗi nước có bao nhiêu du khách tham gia đoàn?

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là số du khách Nhật, Mỹ và Trung Quốc.

Điều kiện là x, y, z nguyên dương

Theo giả thiết của bài toán ta có các phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 3x - 2(y + z) = 150 \\ x + z = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 600 & (1) \\ 3x - 2y - 2z = 150 & (2) \\ x - 3y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

Trừ vế với vế phương trình (1) cho phương trình (3) ta được

$$4y = 600 \Rightarrow y = 150$$

Thay giá trị y = 150 vào phương trình (1) và (2) ta được:

$$\begin{cases} x + z = 450 \\ 3x - 2z = 450 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 900 \\ 3x - 2z = 450 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình cuối ta được:

$$5x = 1350 \Rightarrow x = 270$$

Từ đó suy ra

$$z = 450 - x = 450 - 270 = 180$$

Vậy có 270 du khách Nhật, 150 du khách Mỹ và 180 du khách Trung Quốc.

C/ LUYỆN TẬP

3.21. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 3x - 5y = 6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 8x + 6y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0,5x + 0,7y = 0,8 \\ 0,2x + 0,9y = 0,9 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$

3.22. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x + \dfrac{3}{y} = -5 \\ -3x + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} - 4y = 2 \\ -\dfrac{2}{x+2} + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{6}{y} = 4 \\ \dfrac{3x}{x+1} + \dfrac{3}{y} = 5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x} - \dfrac{2y}{y-2} = 5 \\ -\dfrac{4x-6}{x} - \dfrac{4y}{y-2} = 6 \end{cases}$

3.23. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo tham số a:

a) $\begin{cases} 2ax + (2a+2)y = 1 - a \\ -3x + (a+1)y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (a + 1)x + (a - 1)y = a \\ 3x - (a - 3)y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (a+3)x + (2a+3)y = a \\ (a - 1)x + 3y = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} ax - (a+1)y = 2a + 2 \\ -2ax + (3a+2)y = - a - 4 \end{cases}$

3.24. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (2m + 2)x + (2m + 1)y = 4m + 4 \\ (6m + 5)x - 2(2m + 1)y = 2m + 5 \end{cases}$$

a) Xác định m để hệ phương trình vô nghiệm.

b) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có vô số nghiệm. Lúc đó đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình có đi qua điểm A(2; 3) không?

c) Khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) hãy khử m để tìm một hệ thức giữa x và y.

3.25. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (a + 2)x + 2y = a + 2b \\ 2x + (a - 1)y = a(b - 1) \end{cases}$$

a) Xác định b để hệ phương trình có nghiệm với mọi giá trị của tham số a.

b) Với giá trị nào của a và b thì hệ phương trình có vô số nghiệm?

3.26. Xét sự tương giao của các cặp đường thẳng sau và vẽ chúng trong cùng một mặt phẳng tọa độ.

a) (Δ_1): $2x + 3y = 2$, (Δ_2): $3x - 4y = 6$

b) (d): $5x - 6y = 8$, (d'): $-\frac{5}{2}x + 3y = -4$

c) (Δ): $-3x + 2y = 1$, (Δ'): $6x - 4y = 3$

3.27. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -2x + y + 2z = -4 \\ 3x - 3y + z = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 2x - 4y + 5z = 4 \\ -3x + y - z = 3 \end{cases}$

3.28. Biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm A(1;), B(2; 1), C(3; –3). Tính các hệ số a, b, c và vẽ parabol đó.

3.29. Tìm parabol $y = ax^2 + bx + c$ biết rằng nó có đỉnh $I(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$ và đi qua điểm M(3; 2)

3.30. Cuối năm ba lớp 10 đi siêu thị mua trái cây về liên hoan. Lớp 10A mua 2kg đào, 4kg táo và 7kg nhãn hết 171.000đ, lớp 10B mua 2kg đào, 3kg táo và 8kg nhãn hết 146.000đ, còn lớp 10C mua 1kg đào, 5kg táo và 9kg nhãn hết 186.000đ. Hỏi giá tiền mỗi kg táo, đào và nhãn ở siêu thị đó là bao nhiêu?

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN VÀ HAI ẨN

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Hệ phương trình bậc hai một ẩn có dạng:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a'x^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm khi và chỉ khi phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai có nghiệm chung.

2. Phương trình bậc hai của hai ẩn x, y có dạng

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

3. Một hệ gồm một phương trình bậc hai của hai ẩn và một phương trình bậc nhất của hai ẩn là hệ gồm phương trình (1) và phương trình

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (2)$$

Cách giải hệ phương trình này là từ phương trình (2) rút một ẩn theo ẩn còn lại rồi thế vào phương trình (1) để được một phương trình bậc hai của một ẩn.

4. Hệ phương trình bậc hai đối xứng đối với x và y là hệ mà mỗi phương trình không đổi nếu ta thay x bởi y và thay y bởi x.

Hệ này có dạng: $\begin{cases} ax^2 + ay^2 + cxy + dx + dy + f = 0 \\ a x^2 + a y^2 + c xy + d x + d y + f = 0 \end{cases}$

Phương pháp giải của hệ này là biến đổi để đưa về hệ phương trình đối với $S = x + y$ và $P = xy$, trong đó bậc của P là bậc một.

Sau khi giải ra được S và P thì x và y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$

Điều kiện để có nghiệm x, y là $S^2 \geq 4P$

5. Có những hệ phương trình bậc hai vốn không đối xứng đối với x và y, nhưng khi đổi biến số $t = -x$ (hoặc $t = -y$) thì ta được hệ đối xứng đối với t và y (hoặc x và t). Giải đối với t và y rồi suy ra x và y.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Tìm điều kiện để hệ hai phương trình bậc hai một ẩn vô nghiệm, có nghiệm.

Phương pháp: Hệ hai phương trình bậc hai một ẩn vô nghiệm trong các trường hợp sau: hoặc có ít nhất một phương trình vô nghiệm, hoặc cả hai phương trình đều có nghiệm nhưng không có nghiệm chung.

Ví dụ 1.1: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m + 1)x^2 + 2(m-1)x - 8m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2mx - 3m^2 + 4m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Xác định m để hệ phương trình có nghiệm.

Giải

– Với m = –1 hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} -4x + 8 = 0 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có nghiệm x = 2

– Với m ≠ –1 phương trình (1) có hai nghiệm

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -\frac{4m}{m+1}$$

Phương trình (2) có hai nghiệm

$$x_3 = 3m - 1, \quad x_4 = 1 - m$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi x_1 trùng với một trong hai nghiệm x_3, x_4 hoặc x_2 trùng với một trong hai nghiệm x_3, x_4.

Vì m ≠ –1 nên $x_1 \neq x_4$. Ta có

$$x_1 = x_3 \Leftrightarrow 2 = 3m - 1 \Leftrightarrow m = 1$$

$$x_2 = x_3 \Leftrightarrow -\frac{4m}{m+1} = 3m - 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = x_4 \Leftrightarrow -\frac{4m}{m+1} = 1 - m \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{5}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm khi m nhận một trong các giá trị $-1; \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}; \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}; 2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}$

Ví dụ 1.2: Xác định m để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} mx^2 - 2(m-2)x + m - 4 = 0 & (3) \\ (m-1)x^2 - 2(m+1)x - 3m - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Giải

Ta xét các trường hợp đặc biệt m = 0 và m = 1.

– Khi m = 0 hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ -x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Vậy khi m = 0 hệ phương trình vô nghiệm

– Khi m = 1 hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ -4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy khi m = 1 hệ phương trình cũng vô nghiệm

– Với $m \neq 0$ và $m \neq 1$ phương trình (3) có hai nghiệm

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{m-4}{m}$$

còn phương trình (4) có hai nghiệm

$$x_3 = -1, \; x_4 = \frac{3m+1}{m-1}$$

Muốn cho hệ phương trình vô nghiệm, ta phải có $x_2 \neq x_3$, $x_2 \neq x_4$ và $x_1 \neq x_4$.

$$x_2 \neq x_3 \Leftrightarrow \frac{m-4}{m} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 2$$

$$x_2 \neq x_4 \Leftrightarrow \frac{m-4}{m} \neq \frac{3m+1}{m-1} \Leftrightarrow (m-4)(m-1) \neq m(3m+1)$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 6m - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \text{ và } m \neq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 \neq x_4 \Leftrightarrow 1 \neq \frac{3m+1}{m-1} \Leftrightarrow 3m + 1 \neq m - 1$$

$$\Leftrightarrow m \neq -1$$

Kết luận: Với $m \notin \{-1; 2; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\}$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

VẤN ĐỀ 2: Giải hệ phương trình gồm một phương trình bậc hai và một phương trình bậc nhất hai ẩn.

Phương pháp: Từ phương trình bậc nhất, rút một ẩn theo ẩn kia rồi thay vào phương trình bậc hai để đưa về một phương trình bậc hai một ẩn. Tùy theo phương trình bậc hai cuối này có nghiệm hay vô nghiệm suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm hay vô nghiệm.

Ví dụ 2.1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x^2 - y^2 + xy - 2x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta có

$$3x + 2y = 6 \Rightarrow x = \frac{6 - 2y}{3} = 2 - \frac{2y}{3}$$

Thay vào phương trình bậc hai ta được:

$$3\left(2 - \frac{2y}{3}\right)^2 - y^2 + \left(2 - \frac{2y}{3}\right)y - 2\left(2 - \frac{2y}{3}\right) + 2y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 3\left(4 - \frac{8y}{3} + \frac{4}{9}y^2\right) - y^2 + 2y - \frac{2}{3}y^2 - 4 + \frac{4}{3}y + 2y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}y^2 - \frac{8}{3}y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -y^2 - 8y + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 & \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ y = -9 & \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(\frac{4}{3}; 1\right)$ và $(8; -9)$

Ví dụ 2.2: Xác định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 + my^2 + xy - 3x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình thứ nhất ta suy ra $y = 2x - 3$

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$x^2 + m(2x - 3)^2 + x(2x - 3) - 3x + 3(2x - 3) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (4m + 3)x^2 - 12mx + 9m - 7 = 0$$

Biệt thức $\Delta' = 36m^2 - 36m^2 + m + 21 = m + 21$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -21$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm khi $m < -21$

VẤN ĐỀ 3: Giải hệ phương trình bậc hai đối xứng đối với hai ẩn.

Phương pháp: Nếu hai ẩn là x và y thì ta đặt S = x + y, P = xy, rồi chuyển hệ phương trình đã cho thành một hệ phương trình đối với S và P. Điểm đặc biệt của hệ phương trình này là bậc của P luôn luôn là bậc nhất, nên có thể dễ dàng khử P để đưa về một phương trình bậc hai theo S. Sau khi giải được S và P, dùng định lí Viét để tìm x và y.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x - 4y - 13 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 3xy + 6x + 6y - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta biến đổi hệ phương trình đã cho:

$$\begin{cases} 3\left[(x+y)^2 - 2xy\right] + 5xy - 4(x+y) - 13 = 0 \\ 2\left[(x+y)^2 - 2xy\right] + 3xy + 6(x+y) - 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt S = x + y, P = xy ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 3S^2 - P - 4S - 13 = 0 \\ 2S^2 - P + 6S - 2 = 0 \end{cases}$$

Trừ phương trình đầu cho phương trình thứ hai ta được phương trình:

$$S^2 - 10S - 11 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm: S = –1, S = 11

– Với S = –1 ta được P = –6, lúc đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$ hay $X^2 + X - 6 = 0$

Vậy x = 2, y = –3 hoặc x = –3, y = 2

Trường hợp này hệ phương trình có hai nghiệm (2; –3) và (–3; 2)

– Với S = 11 thì P = 306, lúc đó x và y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 11X + 306 = 0$$

Phương trình này vô nghiệm

Kết luận: hệ phương trình có hai nghiệm (2; –3) và (–3; 2)

VẤN ĐỀ 4: Giải những hệ phương trình bậc hai có thể biến đổi về hệ đối xứng.

Phương pháp: Có những hệ phương trình bậc hai chưa phải là hệ đối xứng, nhưng khi đổi biến số ta có đưa về hệ đối xứng, chẳng hạn biến đổi t = –x, hoặc t = ax với a là hằng số. Giải theo hệ đối xứng mới rồi suy ra nghiệm.

Ví dụ 4.1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy + 4x - 4y + 2 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 3xy - 3x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải

Đổi biến số t = –x ta được hệ phương trình đối xứng đối với t và y :

$$\begin{cases} 2t^2 + 2y^2 + 5ty - 4t - 4y + 2 = 0 \\ 3t^2 + 3y^2 + 3ty + 3t + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left[(t+y)^2 - 2ty\right] + 5ty - 4(t+y) + 2 = 0 \\ 3\left[(t+y)^2 - 2ty\right] + 3ty + 3(t+y) - 4 = 0 \end{cases}$$

Đặt S = t + y, P = ty ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2S^2 + P - 4S + 2 = 0 \\ 3S^2 - 3P + 3S - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6S^2 + 3P - 12S + 6 = 0 \\ 3S^2 - 3P + 3S - 4 = 0 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình vế với vế, ta được phương trình bậc hai theo S:

$$9S^2 - 9S + 2 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $S = \frac{1}{3}$ và $S = \frac{2}{3}$

– Khi $S = \frac{1}{3}$ thì $P = -\frac{8}{9}$, lúc đó t và y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{8}{9} = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $X = \frac{1-\sqrt{33}}{6}$ và $X = \frac{1+\sqrt{33}}{6}$

Vậy trường hợp này hệ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{-1+\sqrt{33}}{6}; \frac{1+\sqrt{33}}{6}\right) \text{và } (x; y) = \left(-\frac{1+\sqrt{33}}{6}; \frac{1-\sqrt{33}}{6}\right)$$

– Khi $S = \frac{2}{3}$ thì $P = -\frac{2}{9}$, lúc đó t và y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{9} = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $X = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$ và $X = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

Vậy trường hợp này hệ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3}; \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right) \text{và } (x; y) = \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{3}; \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$$

Kết luận: hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{6}; \frac{1+\sqrt{33}}{6}\right)$, $\left(-\frac{1+\sqrt{33}}{6}; \frac{1-\sqrt{33}}{6}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3}; \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$, và $\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{3}; \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$

Ví dụ 4.2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 10xy - 4x - 2y + 13 = 0 \\ 14xy - 2x - y - 23 = 0 \end{cases}$$

Giải

Đổi biến số t = 2x ta đưa về một hệ phương trình đối xứng đối với t và y:

$$\begin{cases} t^2 + y^2 - 5ty - 2t - 2y + 13 = 0 \\ 7ty - t - y - 23 = 0 \end{cases}$$

Đặt S = t + y, P = ty ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} S^2 - 7P - 2S + 13 = 0 \\ 7P - S - 23 = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra phương trình $S^2 - 3S - 10 = 0 \Rightarrow S = -2$ và $S = 5$

– Khi S = –2 thì P = 3, lúc đó t và y là nghiệm của phương trình

$X^2 + 2X + 3 = 0 \Rightarrow$ phương trình này vô nghiệm.

– Khi S = 5 thì P = 4, lúc đó t và y là nghiệm của phương trình

$X^2 - 5X + 4 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm X = 1 và X = 4

Vậy ta có hai nghiệm (t; y) = (1; 4) và (t; y) = (4; 1)

Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (x; y) = $(\frac{1}{2}; 4)$ và (x; y) = (2; 1)

VẤN ĐỀ 5: Giải những hệ phương trình mà khi thay x bởi y và thay y bởi x thì phương trình này biến thành phương trình kia.

Phương pháp: Đối với những phương trình dạng này khi trừ từng vế hai phương trình của hệ ta sẽ làm xuất hiện nhân tử x – y và một nhân tử bậc nhất đối với x và y mà ta đã biết cách giải.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 - 5x + 3y - 4 = 0 \\ 3y^2 - x^2 - 5y + 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải

Trừ từng vế hai phương trình ta được

$$4(x^2 - y^2) - 8(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(4x + 4y - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{bmatrix}$$

• $x = y \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

• $x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$. Lúc đó ta có:

$$3x^2 - (2 - x)^2 - 5x + 3(2 - x) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm (–1; –1), (2; 2), $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ và $(1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$

C/ LUYỆN TẬP

3.31. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = 0 \\ 3x^2 + 11x + 6 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x^2 - 13x - 12 = 0 \\ 3x^2 - 13x + 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x^2 + 13x + 6 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 4 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x^2 - 11x + 12 = 0 \\ 4x^2 - 12x + 9 = 0 \end{cases}$

3.32. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-1)x^2 - (2m+1)x - 3m + 12 = 0 \\ x^2 - (2m+5)x + m^2 + 5m + 6 = 0 \end{cases}$$

Xác định m để phương trình có nghiệm

3.33. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx^2 + (m-2)x - 2(m+2) = 0 \\ (m+2)x^2 + 2(m+3)x - 3m = 0 \end{cases}$$

Với giá trị nào của m thì hệ phương trình vô nghiệm?

3.34. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 5y + 18 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -x^2 + 2y^2 - 4xy + 5x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 2x^2 - 3y^2 + 3xy + 2x - 6y - 5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x^2 + y^2 + 4xy + 3x - 2y - \dfrac{33}{8} = 0 \end{cases}$

3.35. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 4y - 9 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 + 5xy - 3x - 3y - 21 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 5x + 5y + 23 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 7xy - 3x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy + 3x + 3y + 15 = 0 \\ x^2 + y^2 + 5xy - 4x - 4y + 7 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3xy + 4x + 4y + 18 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$

3.36. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 4y - 15 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 19 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 3xy + 2x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 + xy - 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x - y + 15 = 0 \\ xy - 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3xy - 3x + 3y - 1 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 4xy - 28 = 0 \end{cases}$

3.37. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 8x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x + 3y - 39 = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 2xy - 21 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 15xy - 2x - 6y + 13 = 0 \\ 21xy - x - 3y - 23 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 2xy - \dfrac{5}{2}x + 5y - 6 = 0 \\ \dfrac{3}{4}x^2 + 3y^2 - xy - 12 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3xy + 3x - 3y - 10 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 4xy - 28 = 0 \end{cases}$

3.38. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y - 3 = 0 \\ 3y^2 - 2xy + 2x - 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x} \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 4y = 1 \\ 3y^2 + 2xy + 4x = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 - 5x = y + 8 \\ 2y^2 - 5y = x + 8 \end{cases}$

Chương IV: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Tính chất của bất đẳng thức

a) $A > B$ và $B > C \Rightarrow A > C$.

b) $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$.

c) $A > B \Leftrightarrow \begin{cases} AC > BC \text{ nếu } C > 0 \\ AC < BC \text{ nếu } C < 0 \end{cases}$.

d) $A > B$ và $C > D \Rightarrow A + C > B + D$.

e) $A > B > 0$ và $C > D > 0 \Rightarrow AC > BD$.

f) Với $A.B > 0$ ta có: $A > B \Leftrightarrow \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$.

g) Với $A, B > 0$, $n \in N^*$ ta có: $A > B \Leftrightarrow A^{2n} > B^{2n}$.

h) Với mọi A, B và $n \in N^*$ ta có: $A > B \Leftrightarrow A^{2n+1} > B^{2n+1}$.

i) $A > B > 0 \Rightarrow \sqrt{A} > \sqrt{B}$ và $\sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B}$.

2. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Với hai số A, B tùy ý, ta có:

a) $|A+B| \le |A| + |B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \ge 0$.

b) $\big||A| - |B|\big| \le |A - B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \ge 0$.

3. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

a) Cho $a \ge 0$ và $b \ge 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

b) Cho $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Áp dụng của bất đẳng thức Cauchy:

a) Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

b) Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

4. Bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki:

a) Với 4 số a, b, x, y khác 0, ta có:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

b) Với 6 số a, b, c, x, y, z khác 0, ta có:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Phương pháp: Để chứng minh một bất đẳng thức ta biến đổi bất đẳng thức ấy tương đương với một bất đẳng thức khác mà ta biết là đúng.

Các tính chất **b)c)f)g)h)** cho ta các phép biến đổi tương đương các bất đẳng thức.

Ví dụ 1.1: Cho ba số a, b, c tùy ý. Chứng minh:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c) \qquad (1)$$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0 \qquad (1a)$

Ta thấy bất đẳng thức (1a) luôn đúng, do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Ví dụ 1.2: Chứng minh rằng $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$ với mọi a, b, c $\in$ R.

Giải

$(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$ (2)

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$ (2a)

Ta thấy bất đẳng thức (2a) luôn đúng, do đó bất đẳng thức (2) được chứng minh.

Ví dụ 1.3: Tìm GTLN của $A = 4xy - 2x^2 - 4y^2 + 4x + 2$ với x, y $\in$ R.

Giải

Ta có $A = -(x^2 - 4xy + 4y^2) - (x^2 - 4x + 4) + 6$

$= -(x - 2y)^2 - (x - 2)^2 + 6 \le 6$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy Max A = 6.

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi hệ quả.

Phương pháp: Xuất phát từ những bất đẳng thức đúng đã biết ta có thể chứng minh được dễ dàng, sử dụng các tính chất **a) d) e) i)** ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 2.1: Cho x, y, z thay đổi và nhận giá trị thuộc đoạn [0, 1]. Chứng minh:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \le 3.$$

Giải

Vì x $\in$ [0, 1] và y $\in$ [0, 1] nên ta có:

$(1 - x^2)(1 - y) \ge 0$, $x^2 \ge x^3$ và $y \ge y^3 \Rightarrow 1 + x^2y \ge x^2 + y \ge x^3 + y^3$.

Do đó $1 + x^2y \ge x^3 + y^3$ (1a)

Tương tự ta có: $1 + y^2z \ge y^3 + z^3$ (1b)

$1 + z^2x \ge z^3 + x^3$ (1c)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1a), (1b) và (1c) ta được:

$3 + (x^2y + y^2z + z^2x) \ge 2(x^3 + y^3 + z^3)$

$\Rightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \le 3$ (ĐPCM)

***Ví dụ 2.2**:* Chứng minh rằng nếu a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh của một tam giác thì:

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \le abc$$

Giải

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên:

$$a > |b - c| \Rightarrow a^2 \ge a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c) > 0 \quad (2a)$$

$$b > |c - a| \Rightarrow b^2 \ge b^2 - (c - a)^2 = (b + c - a)(b - c + a) > 0 \quad (2b)$$

$$c > |a - b| \Rightarrow c^2 \ge c^2 - (a - b)^2 = (c + a - b)(c - a + b) > 0 \quad (2c)$$

Nhân theo vế của (2a), (2b) và (2c) ta được:

$$a^2b^2c^2 \ge (a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2$$

$$\Rightarrow abc \ge (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \quad (\text{ĐPCM})$$

Ví dụ 2.3: CMR: $\forall$ a, b, c > 0 ta có: $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \le \dfrac{a+b+c}{2}$

Giải

Ta có $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \ge 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4} \qquad (3a)$$

Tương tự ta có: $\dfrac{bc}{b+c} \le \dfrac{b+c}{4}$ (3b)

và $\dfrac{ca}{c+a} \le \dfrac{c+a}{4}$ (3c)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (3a), (3b) và (3c) ta được:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \le \frac{a+b+c}{2} \qquad (\text{ĐPCM})$$

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh bất đẳng thức bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

***Phương pháp**:* Gặp các bất đẳng thức trong đó có chứa *tổng, tích của các số không âm* ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

a) Bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm:

Cho $a \ge 0$ và $b \ge 0$, ta có: $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$)

Các dạng khác của bất đẳng thức trên là:

* $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$ * $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $(a \geq 0, b \geq 0)$

* $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ $(\forall a, b)$ * $a^2 + b^2 \geq 2ab$ $(\forall a, b)$

Ví dụ 3.1: Cho a, b là hai số dương. Chứng minh: $(a + b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số a và b,

ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0$ (1a)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$,

ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} > 0$ (1b)

Nhân theo vế (1a) và (1b) $\Rightarrow (a + b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ (ĐPCM)

Ví dụ 3.2: Cho a, b, c là ba số khác 0.

Chứng minh: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2} \geq 2\frac{a}{b}.\frac{b}{c} = 2\frac{a}{c} \quad (2a)$$

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq 2\frac{b}{c}.\frac{c}{a} = 2\frac{b}{a} \quad (2b)$$

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{c}{a}.\frac{a}{b} = 2\frac{c}{b} \quad (2c)$$

Cộng theo vế (2a), (2b) và (2c) $\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ (ĐPCM)

Ví dụ 3.3: Cho x > 2. Chứng minh: $4x + \frac{9}{x-2} \geq 20$.

Giải

Ta có x > 2 nên x – 2 > 0. Do đó:

$$4x + \frac{9}{x-2} = 4(x-2) + \frac{9}{x-2} + 8 \geq 2\sqrt{4(x-2).\frac{9}{x-2}} + 8 = 20 \text{ (ĐPCM)}$$

Ví dụ 3.4: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó.

Chứng minh: a) $(p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4}$

b) $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$.

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ta có:

$$(p-a)(p-b) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2p-a-b}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} \text{ (ĐPCM).}$$

b) Áp dụng kết quả câu a) ta có:

$$0 < (p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4}$$

$$0 < (p-b)(p-c) \leq \frac{a^2}{4}$$

$$0 < (p-c)(p-a) \leq \frac{b^2}{4}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2 \leq \frac{a^2b^2c^2}{64}$$

$$\Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}. \text{ (ĐPCM)}$$

b) Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm:

Cho $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên là:

* $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ $(a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$

* $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ $(a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$

* $abc \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$ $(\forall a, b, c)$

* $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ $(\forall a, b, c)$

Ví dụ 3.5: Cho a, b, c là ba số dương.

Chứng minh: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số a, b và c,

ta có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0$ (a)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ và $\frac{1}{c}$,

ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} > 0$ (b)

Nhân theo vế (a) và (b) $\Rightarrow (a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (ĐPCM)

Ví dụ 3.6: Cho $a > b > 0$. Chứng minh: $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$.

Giải

Ta có:

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = (a - b) + b + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{(a-b)b.\frac{1}{b(a-b)}} = 3 \text{ (ĐPCM)}$$

Ví dụ 3.7: Cho a, b, c ≥ 0 và a + b + c = 1. Tìm GTLN của M = abc(a + b)(b + c)(c + a) (1)

Giải

Vì a, b, c là các số không âm nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$M \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \left(\frac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3 \le \frac{8}{729}$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $M = \frac{8}{729}$. Vậy Max $M = \frac{8}{729}$

VẤN ĐỀ 4: Chứng minh bất đẳng thức bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–côp–xki.

Phương pháp:

a) Bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki cho 4 số khác không

Với 4 số a, b, x, y khác 0, ta có: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \ge (ax + by)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Ví dụ 4.1: Cho x, y là hai số thỏa $x^2 + y^2 = 1$.

Chứng minh $|3x+4y| \le 5$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki cho 4 số 3, 4, x, y ta được:

$$|3x+4y| \le \sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{x^2+y^2} = 5.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x}{3} \\ x^2 + \frac{16x^2}{9} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Ví dụ 4.2: Cho x, y là hai số thỏa 6x + 12y = 5.

Chứng minh: $4x^2 + 9y^2 \ge 1$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki cho 4 số 3, 4, 2x, 3y ta được:

$$5 = |6x+12y| = |3.2x+4.3y| \le \sqrt{3^2+4^2}.\sqrt{4x^2+9y^2}$$

$$\Rightarrow (4x^2 + 9y^2).25 \ge 5^2 \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 \ge 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{3} = \dfrac{3y}{4} \\ 6x+12y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 9y = 0 \\ 6x+12y = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{10} \\ y = \dfrac{4}{15} \end{cases}.$$

b) Bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki cho 6 số khác không:

Với 6 số a, b, c, x, y, z khác 0, ta có: $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \ge (ax + by + cz)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

Ví dụ 4.3: Cho a, b, c là ba số thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh $a+2b+2\sqrt{5}c \le 5$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki cho 6 số: 1, 2, $2\sqrt{5}$, a, b, c ta có:

$$a + 2b + 2\sqrt{5}\,c \le \sqrt{1^2+2^2+(2\sqrt{5})^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 5$$

Vậy $a + 2b + 2\sqrt{5}\,c \le 5$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{2\sqrt{5}} > 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2\sqrt{5}a \\ a^2+4a^2+20a^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/5 \\ b = 2/5 \\ c = 2\sqrt{5}/5 \end{cases}$$

Ví dụ 4.4: Cho x, y, z là ba số thỏa 4x + 9y + 16z = 49. Tìm GTNN của biểu thức: $T = \frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{64}{z}$.

Giải

$$T.\,49 = \left(\frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{64}{z}\right)49 = (4x + 9y + 16z)\left(\frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{64}{z}\right)$$

$$\geq (2.1 + 3.5 + 4.\,8)^2 = 49^2 \quad \Rightarrow T = \frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{64}{z} \geq 49.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{y}}{5/\sqrt{y}} = \dfrac{4\sqrt{z}}{8/\sqrt{z}} \\ 4x+9y+16z = 49 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{3}, z = 2.$

Vậy Min T = 49.

VẤN ĐỀ 5: Chứng minh bất đẳng thức có chứa dấu trị tuyệt đối

Phương pháp: Ta thường sử dụng 2 bất đẳng thức sau để chứng minh:

Với hai số A, B tùy ý, ta có:

a) $|A+B| \leq |A|+|B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \geq 0$.

b) $\big||A|-|B|\big| \leq |A-B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \geq 0$.

Ví dụ 5.1: Cho x, y là hai số thực, chứng minh:

$$|2-x+y|+|-y|+|4-x| \geq 2$$

Giải

Ta có: $|2-x+y|+|-y|+|4-x|$

$\geq |2-x+y-y|+|4-x|$

$\geq |2-x|+|x-4|$

$\geq |2-x+x-4| = 2.$

Ví dụ 5.2: Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \sqrt{5+5x^2}+|2-x|$ với mọi $x \in R$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki và bất đẳng thức $|A+B| \le |A|+|B|$. Ta có:

$$M = \sqrt{5+5x^2} + |2-x|$$

$$= \sqrt{1^2+x^2}.\sqrt{2^2+1^2} + |2-x|$$

$$\ge |2+x| + |2-x| \ge |2+x+2-x| = 4$$

Khi $x = \frac{1}{2}$ thì M = 4. Vậy Min M = 4.

C/ LUYỆN TẬP

4.1. Chứng minh với hai số thực a, b tùy ý, ta có:

a) $a^4 + b^4 \ge a^3b + ab^3$.

b) $a^2 + b^2 + 3(a + b + 3) \ge ab$.

c) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \ge 2a(ab^2 - a + c + 1)$.

4.2. Chứng minh với hai số thực a, b thỏa $a + b \ge 0$ ta có:

a) $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2$. b) $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

4.3. Chứng minh với hai số thực **không âm** a và b ta có:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{a^3+b^3}{2}$$

4.4. Cho a, b, c, d là bốn số thực thỏa $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh:

a) $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ b) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ nếu b, d > 0.

4.5. a) Chứng minh rằng nếu $x \ge y > 0$ thì $\frac{x}{1+x} \ge \frac{y}{1+y}$.

b) Chứng minh rằng với a, b tùy ý, ta có: $\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \ge \frac{|a-b|}{1+|a-b|}$

4.6. a) Cho $0 \le a \le 1$, m, $n \in Z^+$ và m < n. Chứng minh: $a^m \ge a^n$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Cho a > b > 0, m > n, m, $n \in Z^+$. Chứng minh:

$$\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

4.7. Cho a, b, c, d là bốn số dương. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} < 2.$$

4.8. Cho x, y là các số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + |2-y|$$

4.9. CMR: $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8a^2b^2c^2$, $\forall$ a, b, c.

4.10. Cho a, b, c ≥ 0 và a + b + c = 1. CMR: $16abc \leq a + b$

4.11. Cho a ≥ 9, b ≥ 4, c ≥ 1. CMR: $ab\sqrt{c-1} + bc\sqrt{a-9} + ca\sqrt{b-4} \leq \frac{11abc}{12}$

4.12. Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

a) $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$

4.13. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. b) $h_a + h_b + h_c \geq 9.r$

c) $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$ d) $\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \leq \frac{9}{a+b+c}$

4.14. Cho a ≥ 0 và b ≥ 0 thỏa a + b = 1. Chứng minh: $a^2b \leq 4/27$

4.15. CMR: Δ ABC đều $\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{3}{2}$

4.16. Cho x, y, z > 0 và xyz = 1. Chứng minh:

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n + \left(\frac{1+y}{2}\right)^n + \left(\frac{1+z}{2}\right)^n \geq 3$$

4.17. Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình

$$x + y + z + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}$$

4.18. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh: $(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) \geq abcd$.

§2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Khái niệm bất phương trình một ẩn

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $D = D_f \cap D_g$.

Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng: $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ được gọi là ***bất phương trình một ẩn***; x gọi là ***ẩn số*** (hay ***ẩn***) và D gọi là ***tập xác định*** của bất phương trình đó.

Số $x_0 \in D$ gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình nếu khi thay x bởi x_0 vào bất phương trình ta được một mệnh đề đúng.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hay tìm tập nghiệm) của bất phương trình đó.

II. Bất phương trình tương đương

1. Định nghĩa

Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết $f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$.

2. Biến đổi tương đương các bất phương trình

* Phép biến đổi biến một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương với nó được gọi là một phép biến đổi tương đương.

* Định lí sau cho ta một số phép biến đổi tương đương các bất phương trình thường sử dụng:

Định lí

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D, $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D. Khi đó, trên D bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình sau:

a) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

b) $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in D$.

b) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in D$.

Hệ quả:

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D.

a) Quy tắc nâng lên lũy thừa bậc ba: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^3 < [g(x)]^3$

b) Quy tắc nâng lên lũy thừa bậc hai: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ không âm với mọi x thuộc D thì $f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2$

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình.

Phương pháp:

Tương tự như phương trình, khi tìm điều kiện xác định của bất phương trình ta cũng cần chú ý các điều kiện sau:

$\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$

$\frac{A}{B}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B \neq 0$

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau:

a) $x + \frac{x-1}{\sqrt{x-3}} > 2 - \frac{2}{x-4}$ (1)

b) $\sqrt{2-x} + x \leq 2 + \sqrt{x}$ (2)

Giải

a) (1) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

b) (2) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$

VẤN ĐỀ 2: Xét sự tương đương của hai bất phương trình cho trước

Phương pháp: Ta so sánh hai tập nghiệm của hai bất phương trình và dựa vào định nghĩa để kết luận.

Ví dụ 2: Xét xem hai bất phương trình sau có tương đương không? Giải thích.

a) $\sqrt{x-1} \leq 0$ (1) và $x - 1 \leq 0$ (2)

b) $x^2 + x + 1 < 0$ (3) và $x^2 - 2x + 2 \leq 0$ (4)

Giải

a) Không tương đương, vì x = 0 là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1).

b) Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0, \forall x \Rightarrow$ (4) vô nghiệm.

Vậy bất phương trình (3) và (4) tương đương nhau.

VẤN ĐỀ 3: Giải bất phương trình.

Phương pháp: Đặt điều kiện cho bất phương trình.

Biến đổi tương đương bất phương trình đã cho thành bất phương trình đơn giản hơn.

Từ đó tìm đươc nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $\frac{(10-x)\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} > 4$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4>0 \\ 10-x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < 6.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = (4; 6).

C/ BÀI TẬP

4.19. Tìm điều kiện của bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x} > \sqrt{-x}$

b) $\sqrt{x-4} < 1 + \sqrt{x-4}$

c) $x + \frac{3}{\sqrt{x-2}} \le 2 + \frac{x}{x-3}$

d) $\frac{x+2}{1+x^2} \ge 1 + \frac{4}{(x-2)^2}$

e) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{(x-3)(x+4)} > \frac{3}{\sqrt{6-x}}$

4.20. Xét sự tương đương của các cặp bất phương trình sau:

a) $3x - 4 + \frac{1}{x-2} \ge 2 + \frac{1}{x-2}$ và $3x - 6 \ge 0$

b) $2x - 1 + \frac{1}{x+3} \ge 1 + \frac{1}{x+3}$ và $2x - 2 \ge 0$

c) $x + 4 > 0$ và $x^2(x + 4) > 0$

d) $(x^2 - 2x + 3)(x - 5) > 0$ và $x - 5 > 0$

e) $x - 10 \geq 0$ và $(x - 10)^2 \geq 0$

f) $\sqrt{(x-1)(x-2)} \geq x$ và $\sqrt{x-1}.\sqrt{x-2} \geq x$

4.21. Chứng minh bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $\sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} \geq -4$

b) $(x - 3)\sqrt{-x-10} > (x^4 + 1)\sqrt{x^2 - 16}$

c) $\sqrt{x^2+1} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}} < 4$

d) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - x + 1} < 2\sqrt[4]{x^3 + 1}$

e) $\sqrt{4x^2 + 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} < 2$

4.22. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x-3} \geq \sqrt{3-x}$

b) $\sqrt{x-1} < 3 + \sqrt{x-1}$

c) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-4}} \leq \dfrac{4}{\sqrt{x-4}}$

d) $\sqrt{(x-3)(x^2 - 10x + 25)} > 0$

4.23. Không giải, chứng minh bất phương trình nghiệm đúng mọi x.

a) $x^4 - x^2 + 1 > 0$;

b) $(x - 3)^2(x^2 - x + 2) \geq 0$

c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$;

d) $5x^2 + (x - 2)^2 + \dfrac{2}{x^2+1} \geq x^2$

4.24. Để giải bất phương trình $\sqrt{x-3} \geq \sqrt{3x-7}$ bạn An đã làm như sau:

Do hai vế của bất phương trình đều không âm nên:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2 \geq \left(\sqrt{3x-7}\right)^2 \Leftrightarrow x - 3 \geq 3x - 7 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \leq 2$.

Theo em, bạn An giải đúng hay sai? Giải thích.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + b > 0;\ ax + b < 0;\ ax + b \geq 0;\ ax + b \leq 0.$$

trong đó a, b là hai số cho trước với $a \neq 0$ và x là ẩn số.

II. Giải và biện luận bất phương trình $ax + b > 0$ (1)

1. Nếu $a > 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = (-\frac{b}{a}; +\infty)$

2. Nếu $a < 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Vậy tập nghiệm của (1) là

$S = (-\infty; -\frac{b}{a})$

3. Nếu $a = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow 0x + b > 0$:

* Nếu $b \leq 0$ thì (1) vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \varnothing$.
* Nếu $b > 0$ thì (1) nghiệm đúng với mọi x. Vậy tập nghiệm của (1) là $S = R$.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Phương pháp: * Biến đổi bất phương trình về một trong 4 dạng

$ax + b > 0$; $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$.

* Biện luận theo bảng tóm tắt.

Ví dụ 1.1: Giải và biện luận bất phương trình $x + 2m > 2 + mx$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow (m - 1)x + 2 - 2m < 0$ $(a = m - 1, b = 2 - 2m)$

* Nếu $m > 1$ thì $a > 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x < \frac{2m-2}{m-1} = 2$.

* Nếu $m < 1$ thì $a < 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x > \frac{2m-2}{m-1} = 2$.

* Nếu $m = 1$ thì $(1) \Leftrightarrow 0x + 0 < 0$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận: + $m > 1$: Tập nghiệm của (1) là $S = (-\infty; 2)$.

+ $m < 1$: Tập nghiệm của (1) là $S = (2; +\infty)$.

+ $m = 1$: Tập nghiệm của (1) là $S = \varnothing$.

Ví dụ 1. 2: Giải và biện luận bất phương trình $25m^2 - x < m^2x - 5$ (2)

Giải

$(2) \Leftrightarrow (m^2 + 1)x - 25m^2 - 5 > 0$ $(a = m^2 + 1;\ b = -25m^2 - 5)$

Ta có $a = m^2 + 1 > 0,\ \forall\ m$ nên $(1) \Leftrightarrow x > \dfrac{25m^2 + 5}{m^2 + 1}$.

Kết luận: $\forall\ m \in R$, Tập nghiệm của (2) là $S = (\dfrac{25m^2 + 5}{m^2 + 1};\ +\infty)$.

Ví dụ 1.3: Giải và biện luận bất phương trình

$$2x + m^2 \geq mx + 3m - 2 \qquad (3)$$

Giải

$(3) \Leftrightarrow (2 - m)x + m^2 - 3m + 2 \geq 0$ $(a = 2 - m,\ b = m^2 - 3m + 2)$

* Nếu $m > 2$ thì $a < 0$ nên $(3) \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-m^2 + 3m - 2}{2 - m} = m - 1.$

* Nếu $m < 2$ thì $a > 0$ nên $(3) \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-m^2 + 3m - 2}{2 - m} = m - 1.$

* Nếu $m = 2$ thì $(3) \Leftrightarrow 0x + 0 \geq 0$ nên (3) có nghiệm x tùy ý.

Kết luận: + $m > 2$: Tập nghiệm của (3) là $S = (-\infty;\ m - 1]$.

+ $m < 2$: Tập nghiệm của (3) là $S = [m - 1;\ +\infty)$.

+ $m = 2$: Tập nghiệm của (3) là $S = R$.

VẤN ĐỀ 2: Định giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước.

Phương pháp: Dựa vào bảng tóm tắt để nêu lên điều kiện mà bất phương trình phải thỏa, từ đó ta tìm được giá trị của tham số.

Ví dụ 2.1: Cho bất phương trình

$$(2m^2 - m)x + 5m \geq (m^2 + 2)x - 1 + 3m\ (1).$$

Định m để (1) thỏa với mọi $x \in R$.

Giải

$(1) \Leftrightarrow (m^2 - m - 2)x + 2m + 1 \geq 0$

Do đó (1) thỏa với mọi $x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ 2m + 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ hay } m = 2 \\ 2m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Ví dụ 2.2: Định m để bất phương trình $mx - 16 \geq 2(x - m^3)$ (2) có tập nghiệm là $[-38; +\infty)$.

Giải

$(2) \Leftrightarrow (m - 2)x + 2m^3 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 2)[x + 2(m^2 + 2m + 4) \geq 0$

* $m = 2$: (2) có tập nghiệm là R nên giá trị $m = 2$ bị loại

* $m < 2$: $(2) \Leftrightarrow x + 2(m^2 + 2m + 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2(m^2 + 2m + 4)$ nên những giá trị $m < 2$ bị loại

* $m > 2$: $(2) \Leftrightarrow x + 2(m^2 + 2m + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2(m^2 + 2m + 4)$ nên (2) có tập nghiệm là $[-2(m^2 + 2m + 4); +\infty)$. Do đó:

(2) có tập nghiệm là $[-38, +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -2\left(m^2 + 2m + 4\right) = -38 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 + 2m + 4 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m = -5 \text{ hay } m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Kết luận: m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = 3$.

VẤN ĐỀ 3: Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Phương pháp:

Giải hệ bất phương trình một ẩn, chẳng hạn $\begin{cases} f(x) < 0 \ (1) \\ g(x) > 0 \ (2) \end{cases}$ (I),

là tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình (1) và (2).

Để giải hệ bất phương trình (I), ta làm các bước sau:

* Giải (1) để tìm tập nghiệm S_1.
* Giải (2) để tìm tập nghiệm S_2.
* Tập nghiệm của (I) là $S = S_1 \cap S_2$.

Ví dụ 3.1: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 9x - 12 \geq 4x + 15 & (1) \\ 19 - 3x < 7 + 5x & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4 < 3x - 1 & (1b) \\ (3 - x)^2 < (2x - 3)^2 & (2b) \end{cases}$

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow 5x \geq 27 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{27}{5} \Rightarrow$ (1) có tập nghiệm là $S_1 = [\dfrac{27}{5}; +\infty)$

$(2) \Leftrightarrow -8x < -12 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow$ (2) có tập nghiệm là $S_2 = (\frac{3}{2}; +\infty)$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = [\frac{27}{5}, +\infty)$

b) $(1b) \Leftrightarrow x > -3 \Rightarrow$ (1b) có tập nghiệm là $S_1 = (-3, +\infty)$

$(2b) \Leftrightarrow (2x - 3)^2 - (3 - x)^2 > 0 \Leftrightarrow x(3x - 6) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases} \text{V} \begin{cases} x < 0 \\ 3x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 2 \\ x < 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ (2b) có tập nghiệm là $S_2 = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-3; 0) \cup (2; +\infty)$

Ví dụ 3. 2: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 7 \le 0 & (1) \\ mx \ge m + 12 & (2) \end{cases}$.

a) Định m để hệ có nghiệm.

b) Định m để hệ có duy nhất một nghiệm.

Giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow x \le 7$ nên tập nghiệm của (1) là $S_1 = (-\infty, 7]$.

Xét (2):

* $m > 0$: $(2) \Leftrightarrow x \ge \frac{m+12}{m} \Rightarrow$ tập nghiệm của (2) là

$S_2 = [\frac{m+12}{m}; +\infty)$.

* $m = 0$: $(2) \Leftrightarrow 0x \ge 12 \Rightarrow$ tập nghiệm của (2) là $S_2 = \varnothing$.

* $m < 0$: $(2) \Leftrightarrow x \le \frac{m+12}{m} \Rightarrow$ tập nghiệm của (2) là

$S_2 = (-\infty; \frac{m+12}{m}]$.

a) Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \ne \varnothing \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m < 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ \frac{m+12}{m} \le 7 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m < 0 \\ m \ge 2 \end{bmatrix}$.

b) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \dfrac{m+12}{m} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Ví dụ 3.3: Giải và biện luận hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2} < 4x-8 \\ (x-m+1)^2 > (x-m-1)^2 \end{cases}$$

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15<0 & (1) \\ (2x-2m)(2)>0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow (x-4)^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-3) < 0$

Lập bảng xét dấu ta được tập nghiệm của (1) là $S_1 = (3; 5)$.

$(2) \Leftrightarrow x > m$ nên tập nghiệm của (2) là $S_2 = (m; +\infty)$.

Gọi S là tập nghiệm của hệ thì $S = S_1 \cap S_2$.

Kết luận:

* $m \le 3$: $S = (3; 5)$

* $3 < m < 5$: $S = (m; 5)$

* $m \ge 5$: $S = \varnothing$.

C/ BÀI TẬP

4.25. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{x+2}{3} + x - 3 > x - 2$ b) $\dfrac{3x+5}{2} - 1 \le \dfrac{x+2}{3} + x$

c) $(1-\sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$ d) $(x+\sqrt{3})^2 \ge (x-\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}$

4.26. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $(m^2 + m + 1)x - 5m \ge (m^2 + 2)x - 3m - 1$

b) $(m^2 - m)x + m < 2x + 1$

4.27. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in R$:

a) $m^2(x-1) \ge 9x + 3m$ b) $\sqrt{(m^2-4)x - m + 3} \ge 2$

4.28. Giải và biện luận bất phương trình:

a) $m(x-m) \ge x - 1$ b) $mx + 6 < 2x + 3m$

c) $(x + 1)k + x > 3x + 4$ d) $2(x - m) - (m + 1)^3 \geq 3 - mx$.

4.29. Tìm m để bất phương trình $(m^2 + m + 1)x - 5m \geq 3x - 3m - 1$ thỏa với mọi $x > \frac{3}{2}$.

4.30. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{4-x}\left[(m^2+1)x-5m\right] \geq 0$ có tập nghiệm là [2, 4]

4.31. Định m để hàm số $y = \sqrt{(m-1)x-m+2}$ xác định với mọi $x \in [0, 2]$.

4.32. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} \frac{5x+7}{3} \geq 3-x \\ \frac{1-5x}{13} < 3x+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+x)^2 > x^2-3x+5 \\ x^3-6x^2-7x+5 < (x-2)^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-1 \leq 2x-3 \\ 3x < x+5 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3 \end{cases}$

4.33. Tìm tất cả các giá trị m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} 4x-5 > -3x+2 \\ 3x+2m+2 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4(x-3)+1 \leq 3(x-3) \\ x+m > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-1 < x+2 \\ m(m+1)x+1 > (m-2)x+3m+7 \end{cases}$

4.34. Tìm tất cả các giá trị m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $\begin{cases} 2x+7 < 8x-1 \\ m+5 < 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2+7x+1 \\ 2m \leq 8+5x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+5 \geq x-1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2+9 \\ m^2x+1 > (3m-2)x+m \end{cases}$

4.35. Định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} 2m(x+1) \geq x+3 \\ 4mx+3 \geq 4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x^2-x+3}{x} \geq x \\ m(x-1) \geq 2 \end{cases}$.

4.36. Định m để hàm số $y = \sqrt{2x-m-2} - \sqrt{2m+1-mx}$ xác định với mọi $x \geq 1$.

§4. DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. ***Định nghĩa***: Nhị thức bậc nhất biến x là biểu thức có dạng

$$f(x) = ax + b$$

trong đó a, b là hai số cho trước với $a \neq 0$.

2. Nghiệm của nhị thức bậc nhất

* Nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ được gọi là nghiệm của nhị thức f(x).

* Nhị thức $f(x) = ax + b$ có nghiệm duy nhất là $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

3. Dấu của nhị thức bậc nhất

Định lí: Cho nhị thức $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$

* f(x) cùng dấu với a với $x > -\dfrac{b}{a}$.

* f(x) trái dấu với a với $x < -\dfrac{b}{a}$.

Kết quả định lí thể hiện trong bảng tóm tắt sau:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	**trái dấu với a**	0	**cùng dấu với a**

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Xét dấu một biểu thức.

Phương pháp: * Phân tích biểu thức thành tích, thương các nhị thức bậc nhất

* Tìm nghiệm của các nhị thức.

* Xét dấu của hệ số a của mỗi nhị thức

* Dựa vào định lí về dấu nhị thức để lập bảng xét dấu của nhị thức. Từ đó suy ra dấu của biểu thức trên các khoảng chia.

Ví dụ 1: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 2x + 6$; b) $g(x) = -3x + 5$;

c) $h(x) = (m^2 + 1)x - 3m$; d) $k(x) = 4m - (m^2 + 2m + 2)x$

Giải

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	

Vậy $f(x) > 0$ khi $x > -3$; $f(x) < 0$ khi $x < -3$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5/3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$5/3$		$+\infty$
g(x)		$+$	0	$-$	

Vậy $g(x) > 0$ khi $x < 5/3$; $g(x) < 0$ khi $x > 5/3$.

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3m}{m^2+1}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{3m}{m^2+1}$		$+\infty$
h(x)		$-$	0	$+$	

Vậy $h(x) > 0$ khi $x > \dfrac{3m}{m^2+1}$; $h(x) < 0$ khi $x < \dfrac{3m}{m^2+1}$.

d) $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4m}{m^2+2m+2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{4m}{m^2+2m+2}$		$+\infty$
f(x)		$+$	0	$-$	

Vậy $k(x) > 0$ khi $x < \dfrac{4m}{m^2+2m+2}$; $k(x) < 0$ khi $x > \dfrac{4m}{m^2+2m+2}$.

Ví dụ 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = (2x - 4)(x + 1)(6 - 2x)$. b) $g(x) = \dfrac{x^2 - (2x-6)^2}{(1-x)(4+x)}$

Giải

a) $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$2x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$6-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$ hoặc $x \in (2, 3)$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty)$

b) Ta có $g(x) = \dfrac{(3x-6)(-x+6)}{(1-x)(4+x)}$.

$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$-x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$4 + x = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		1		2		6		$+\infty$
$3x-6$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+6$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	
$4+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$	$+$	

Vậy $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (1; 2) \cup (6; +\infty)$.

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 1) \cup (2; 6)$

VẤN ĐỀ 2: Ứng dụng của dấu nhị thức để giải bất phương trình.

***Phương pháp*:** * Biến đổi bất phương trình về một trong các dạng: $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ trong đó $f(x)$ là tích hay thương của các nhị thức bậc nhất.

* Lập bảng xét dấu $f(x)$.

* Dựa vào bảng xét dấu để rút ra tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 2.1: Giải các bất phương trình sau:

a) $(x-3)^3 - 4x + 12 \geq 0$ (1)

b) $\dfrac{4x-3}{x-2} > 5$;

c) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} \leq 0$.

Giải

a) Ta có

$(1) \Leftrightarrow (x-3)^3 - 4(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)[(x-3)^2 - 4] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 6x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)(x-5) \geq 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-5$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy bất phương trình có nghiệm là $1 \leq x \leq 3$ hoặc $x \geq 5$.

b) Ta có

$$\frac{4x-3}{x-2} > 5 \Leftrightarrow \frac{-x+7}{x-2} > 0 .$$

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$-x+7$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Vế trái		$-$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	

Vậy nghiệm của bất phương trình là $2 < x < 7$.

c) Ta có $\frac{x^3 - 2x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 2x + 2)}{(x+2)(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x+2)(x-3)} \le 0$

(vì $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0, \forall x$)

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
x		$-$	∣	$-$	0	$+$	∣	$+$	
x + 2		$-$	0	$+$	∣	$+$	∣	$+$	
x − 3		$-$	∣	$-$	∣	$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -2$ V $0 \le x < 3$.

VẤN ĐỀ 3: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Phương pháp: Với bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thường sử dụng hai cách sau:

Cách 1: Xét dấu biểu thức trong dấu trị tuyệt đối, áp dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối để bỏ dấu trị tuyệt đối đưa về bất phương trình không có dấu trị tuyệt.

Cách 2: Áp dụng các tính chất:

$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$ hay $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$ để giải.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $|2x-4| \le x + 12$ b) $|x-3| > 3x+15$; c) $\frac{|x-1|+3}{|5-x|+x} < 4$

Giải

a) $|2x-4| \le x + 12$

$\Leftrightarrow -x - 12 \le 2x - 4 \le x + 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \ge -8 \\ x \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \le x \le 16.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = [-\frac{8}{3}; 16]$.

b) Ta có $|x-3| > 3x+15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3 > 3x+15 \\ x-3 < -3x-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -9 \\ x < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x < -3.$

Vậy tập nghiệm của (2) là $S = (-\infty, -3)$.

c) Xét $\dfrac{|x-1|+3}{|5-x|+x} < 4$ (a)

Giải

$* x < 1$: (a) $\Leftrightarrow \dfrac{-x+4}{5-x+x} < 4 \Leftrightarrow -x + 4 < 20 \Leftrightarrow x > -16.$

So sánh điều kiện được $-16 < x < 1$.

$* 1 \le x < 5$ (a) $\Leftrightarrow \dfrac{x-1+3}{5-x+x} < 4 \Leftrightarrow x + 2 < 20 \Leftrightarrow x < 18.$

So sánh điều kiện ta được $1 \le x < 5$.

$* x \ge 5$: (a) $\Leftrightarrow \dfrac{x-1+3}{-5+x+x} < 4 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2x-5} < 4 \Leftrightarrow \dfrac{-7x+22}{2x-5} < 0$

$\Leftrightarrow -7x + 22 < 0$ (do $x \ge 5$)

$\Leftrightarrow x > \dfrac{22}{7}$. So sánh điều kiện ta được $x \ge 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

$S = (-16; 1) \cup [1; 5) \cup [5; +\infty) = (-16; +\infty)$.

C/ BÀI TẬP

4.37. Xét dấu các biểu thức:

1) $\dfrac{4-3x}{2x+3}$

2) $1+\dfrac{x-2}{3x-2}$

3) $(2x-4)(4-x)^2(5-2x)$

4) $\dfrac{2x(x+1)(x-2)}{(x-3)(6-x)}$

5) $-2x^2 + 5x - 2$

6) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

4.38. Giải các bất phương trình sau:

1) $\dfrac{(3+x)(2-x)}{x+1} \ge 0$

2) $\dfrac{3}{1-x} > \dfrac{5}{2x+1}$

3) $\dfrac{(3-x)(x^2-4x+4)}{x^3-x} \le 0$

4) $\dfrac{2x-3}{3x+5} < \dfrac{3x+5}{2x-3}$

4.39. Giải và biện luận bất phương trình:

1) $\dfrac{x-4m}{2-x} > 0$ 2) $(2x-3)(x-m-1) \le 0$

4.40. Giải các hệ bất phương trình:

1) $\begin{cases} (x-2)(6-x) \ge 0 \\ \dfrac{4x-3}{2} < x+3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-1} \le \dfrac{1}{3-x} \\ |x<1| \end{cases}$

4.41. Giải và biện luận hệ bất phương trình:

1) $\begin{cases} (x-\sqrt{5})(\sqrt{7}-x) > 0 \\ x-m+1 \le 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{1-x} > \dfrac{5}{1-2x} \\ x-m-1 \ge 0 \end{cases}$

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

1. ***Định nghĩa:*** Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax + by + c > 0$, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \ge 0$, $ax + by + c \le 0$

trong đó a, b, c là những số cho trước sao cho $a^2 + b^2 \ne 0$ và x, y là các ẩn số.

Mỗi cặp số (x_0, y_0) sao cho $ax_0 + by_0 + c > 0$ gọi là **một nghiệm** của bất phương trình.

$$ax + by + c > 0.$$

Tập hợp các điểm $M(x_0, y_0)$ trong đó (x_0, y_0) là nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$ được gọi là ***miền nghiệm*** của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

2. ***Định lí:*** Trong mặt phẳng tọa độ, đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành 2 nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa bất

phương trình $ax + by + c > 0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa bất phương trình $ax + by + c < 0$.

II. Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

1. ***Định nghĩa***: Một hệ bất phương trình mà mỗi bất phương trình của hệ là bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y gọi là hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn số.
2. Tập hợp tất cả các điểm có tọa độ thỏa mọi bất phương trình của hệ được gọi là **miền nghiệm** của hệ bất phương trình.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Xác định miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Phương pháp: Để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$ (1), ta làm như sau:

– Vẽ đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$.

– Chọn một điểm $M(x_0; y_0)$ không thuộc (d). Tính giá trị $P = ax_0 + by_0 + c$. Thường ta chọn M là điểm gốc tọa độ 0.

* Nếu **P > 0** thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **chứa điểm M** là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

* Nếu **P < 0** thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) **không chứa điểm M** là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$.

Chú ý: Với các bất phương trình $ax + by + c \geq 0$ hay $ax + by + c \leq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của bất phương trình

$$2x + y - 2 > 0.$$

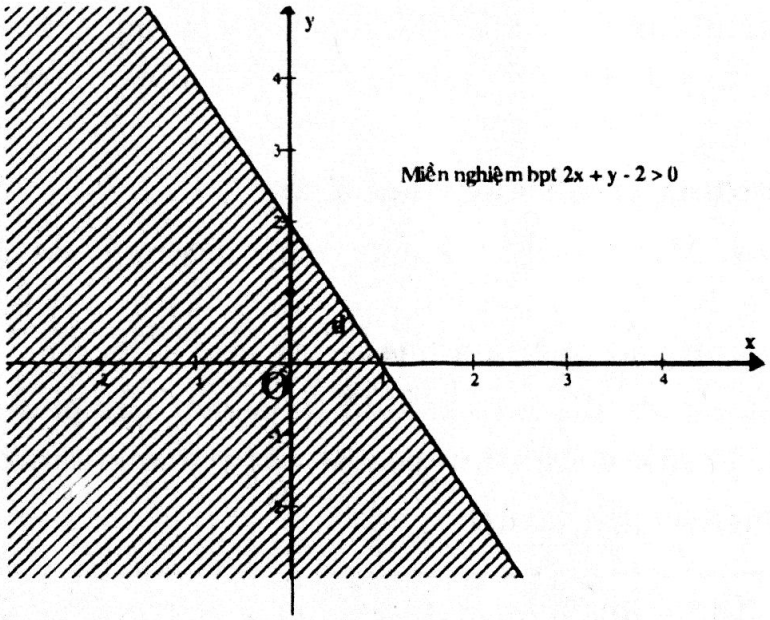
Giải

* Vẽ đường thẳng (d): $2x + y - 2 = 0$.

* Xét điểm O(0, 0) không thuộc (d).

Ta có $P = 2.0 + 1.0 - 2 = -2 < 0$.

Vậy nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm O là miền nghiệm của bất phương trình $2x + y - 2 > 0$. Đó là phần *không bị gạch chéo* trên hình vẽ bên.



VẤN ĐỀ 2: Xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Phương pháp: Để xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn ta làm như sau:

- Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ và *gạch bỏ* miền còn lại.
- Sau khi đã xác định hết tất cả các miền nghiệm của từng bất phương trình của hệ, thì miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ.

Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y+1>0 \\ 2x-y+4>0 \\ x+y+1>0 \\ 2x+y-4<0 \end{cases}$

Giải

* Vẽ 4 đường thẳng

(d_1): $x - y + 1 = 0$

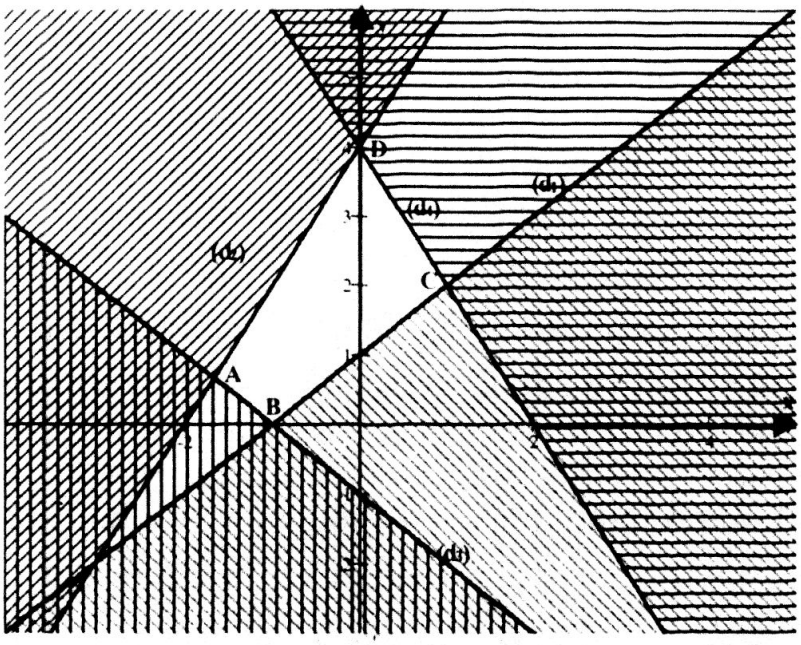
(d_2): $2x - y + 4 = 0$

(d_3): $x + y + 1 = 0$

(d_4): $2x + y - 4 = 0$

* Sau khi gạch bỏ các miền không là miền nghiệm của từng bất

phương trình, ta được miền nghiệm của hệ đã cho là phần trong của tứ giác ABCD (phần không bị gạch) trong hình vẽ.



VẤN ĐỀ 3: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức bậc nhất 2 ẩn.

Phương pháp: Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức F = ax + by với (x; y) nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn cho trước, ta tiến hành các bước sau:

* Xác định miền nghiệm S của hệ bất phương trình đã cho. Ta thường được S là một đa giác.

* Tính giá trị của F ứng với (x, y) là tọa độ các đỉnh của đa giác.

* *Kết luận:* + Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.

+ Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F = 3x + 9y với (x; y) là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y+1\geq 0 \\ 2x-y+4\geq 0 \\ x+y+1\geq 0 \\ 2x+y-4\leq 0 \end{cases}$ (1).

Giải

* Dựa vào kết quả của ví dụ trong Vấn đề 2, ta có miền nghiệm của (1) là tứ giác ABCD (kể cả các cạnh)

* Tại $A(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3})$ ta có F = 1

Tại B(−1, 0) ta có F = −3

Tại C(1; 2) ta có F = 21

Tại D(0; 4) ta có F = 36.

Vậy giá trị lớn nhất của F là 36 đạt được khi x = 0, y = 4.

Giá trị nhỏ nhất của F là −3 đạt được khi x = −1, y = 0.

C/ BÀI TẬP

4.42. Xác định miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn:

a) $2x - 4y + 5 > 0$ b) $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 < 0$

c) $x - 2y - 6 \geq 0$ d) $-2x + 3y - 6 \leq 0$

4.43. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình hai ẩn sau:

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 > 0 \\ 2(x-1) + \frac{y}{2} < 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 5y + 20 > 0 \\ y < 0 \\ y + 5 > \frac{x-3}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x + 3y \leq -3 \\ x - y > 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y - 6 \geq 0 \\ 2(x-1) + \frac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

4.44. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ thỏa hệ:

$$\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Hãy xác định (S) để thấy (S) là một tam giác.

b) Trong (S) hãy tìm điểm (x, y) làm cho biểu thức f(x, y) = y − x có giá trị nhỏ nhất.

4.45. ***Bài toán vitamin*:**

Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể con người. Kết quả như sau:

i) Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B.

ii) Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B.

iii) Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị viatmin B phải nhiều hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A.

Giả sử x, y lần lượt là số đơn vị vitamin A và B mà bạn dùng mỗi ngày.

a) Gọi c là số tiền vitamin mà bạn phải trả mỗi ngày (tính bằng đồng). Hãy viết phương trình biểu diễn c dưới dạng một biểu thức của x và y, nếu giá một đơn vị vitamin A là 9 đồng và giá một đơn vị vitamin B là 7, 5 đồng.

b) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện **i) ii) iii)** thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm (S) của hệ.

c) Tìm phương án dùng loại vitamin A và B thỏa mãn điều kiện trên để có số tiền phải trả ít nhất, biết rằng c đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của miền nghiệm (S).

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Tam thức bậc hai

Định nghĩa

* Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các số thực cho trước và $a \neq 0$.
* Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.
* Các biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$ theo thứ tự gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

II. Dấu của tam thức bậc hai

Định lí:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

* Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in R$.

* Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

* Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1; x_2)$ (tức là $x_1 < x < x_2$), và $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ (tức là $x < x_1$ hay $x > x_2$).

Hệ quả: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có:

$* \forall x \in R, f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ $\quad * \forall x \in R, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

$* \forall x \in R, f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ $\quad * \forall x \in R, f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Xét dấu một tam thức bậc hai

Phương pháp: – Tính Δ

– Tìm nghiệm (nếu có) của tam thức.

– Dựa vào dấu Δ và dấu của a, áp dụng định lí về dấu tam thức để xác định dấu của tam thức.

Ví dụ 1.1: Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 - x - 12$; b) $g(x) = -2x^2 + 5x - 2$;

c) $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$ d) $k(x) = -3x^2 + 2x - 5$.

Giải

a) $\Delta = 49 > 0 \Rightarrow f(x)$ có 2 nghiệm là $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

b) $g(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow f(x)$ có 2 nghiệm là $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1/2		2		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

c) $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$

$\Delta = 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm kép là $x = 3/2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3/2		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

d) $k(x) = -3x^2 + 2x - 5$.

$\Delta' = -14 < 0 \Rightarrow f(x)$ vô nghiệm mà $a = -3 < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in R$.

Ví dụ 1.2: Chứng minh phương trình $4x^2 + 4(m + 2)x + 3m + 2 = 0$ (1) luôn có nghiệm với mọi m.

Giải

Ta có $\Delta' = 4(m + 2)^2 - 4(3m + 2) = 4(m^2 + m + 2)$

mà $m^2 + m + 2 > 0, \forall m \Rightarrow \Delta' > 0, \forall m \Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có nghiệm.

Ví dụ 1.3: Chứng minh phương trình $x^2 + (1 + m\sqrt{3})x + m^2 + m\sqrt{3} + 2 = 0$ luôn vô nghiệm với mọi m.

Giải

Ta có:

$\Delta = (1 + m\sqrt{3})^2 - 4(m^2 + m\sqrt{3} + 2) = -m^2 - 2m\sqrt{3} - 7$

Tam thức cuối đối với m có $\Delta' = -4 < 0$ nên

$-m^2 - 2m\sqrt{3} - 7 < 0, \forall m \Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm.

VẤN ĐỀ 2: Tìm giá trị của tham số để tam thức bậc hai không đổi dấu trên R.

Phương pháp: Áp dụng hệ quả định lí về dấu tam thức để thiết lập một hệ bất phương trình theo ẩn là tham số cần tìm. Từ đó xác định được giá trị của tham số thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2.1: Tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức:

$f(x) = (3m + 1)x^2 - (3m + 1)x + m + 4$

luôn dương với mọi $x \in R$.

Giải

* $m = -\frac{1}{3}$: $f(x) = \frac{11}{3} > 0, \forall x \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$ (nhận)

* $m \neq -\frac{1}{3}$: $f(x) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ -3m^2 - 46m - 15 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1/3 \\ m < -15 \text{ v } m > -1/3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}.$

Vậy m thỏa bài toán $\Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.2: Tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức:

$f(x) = (m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$

luôn âm với mọi $x \in R$.

Giải

* $m = 4$: $f(x) = -5x + 7 > 0 \Leftrightarrow x > 7/5 \Rightarrow m = 4$ bị loại

* $m \neq 4$: $f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 < 0 \\ (m+1)^2 - 4(m-4)(2m-1) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ -7m^2 + 38m - 15 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < 3/7 \text{ hay } m > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{7}.$

Kết luận: m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < \frac{3}{7}$.

Ví dụ 2.3: Tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức:

$f(x) = (m + 4)x^2 - (m - 4)x - 2m + 1$

không âm với mọi $x \in R$.

Giải

* $m = -4$: $f(x) = 8x + 9 > 0 \Leftrightarrow x > -9/8 \Rightarrow m = -4$ loại.

$$* \ m \neq -4: \ f(x) \geq 0, \ \forall \ x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 > 0 \\ (m-4)^2 - 4(m+4)(-2m+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ 9m^2 + 20m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ -20/9 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{20}{9} \leq m \leq 0.$$

Kết luận: m thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -\frac{20}{9} \leq m \leq 0$.

C/ BÀI TẬP

4.46. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $2x^2 - 2x + 1$

b) $-x^2 - 5x - 6$

c) $-9x^2 + 6x - 1$

d) $x^2 - \sqrt{3}\,x + \frac{3}{4}$

e) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 - \sqrt{2}$

f) $x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$

g) $x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + \sqrt{3}$

h) $-\sqrt{3}\,x^2 - (1 + \sqrt{3})x - 1$

4.47. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $\frac{(x-7)(x^2+x-2)}{2x^2-x+3}$

b) $\frac{(x^2+6x+9)(1-x^2)}{8-2x-x^2}$

c) $\frac{x^2-4x-12}{\sqrt{6}x^2-3x+\sqrt{2}}$

d) $\frac{x^3+5x-4}{x^4+4x^3-8x-5}$

4.48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn dương với mọi $x \in R$:

a) $f(x) = (m^2 + 3)x^2 + 2(m + 1)x + 1$

b) $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + m + 4$

c) $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$

4.49. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn âm với mọi $x \in R$:

a) $f(x) = (m + 4)x^2 - (m - 1)x - 1 - 2m$

b) $f(x) = (m - 2)x^2 + 2x - 4$

c) $f(x) = m(m + 8)\,x^2 - 2(m + 8)x + 8m + 1$

4.50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn không dương với mọi $x \in R$:

a) $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + 2$

b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 6$

4.51. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức sau luôn không âm với mọi $x \in R$:

a) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + 2(m + 3)x + 1$

b) $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 4$

c) $f(x) = x^2 + (m - 2)x - 8m + 1$

4.52. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm với mọi m:

a) $(3 - 2m)x^2 + (3m - 2)x + m - 1 = 0$

b) $(3m - 1)x^2 + 3(m + 1)x + 1 = 0$

4.53. Chứng minh phương trình sau vô nghiệm với mọi m:

a) $(2m^2 - 7m + 10)x^2 + 2(m - 3)x + 1 = 0$

b) $x^2 + (1 - \sqrt{3}\, m)x + m^2 - m\sqrt{3} + 2 = 0.$

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

Định nghĩa

1. Bất phương trình bậc hai (một ẩn) là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$$

trong đó f(x) là một tam thức bậc hai.

2. Hệ bất phương trình bậc hai là một hệ gồm các bất phương trình bậc hai.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Giải bất phương trình bậc hai.

Phương pháp: Để giải một bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ: Giải bất phương trình

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$ b) $-x^2 + 2x - 5 < 0$

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$ nên: $2x^2 - 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$.

b) Tam thức $-x^2 + 2x - 5$ vô nghiệm và có $a = -1 < 0$ nên với mọi $x \in R$ ta có:

$$-x^2 + 2x - 5 < 0$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = R$.

VẤN ĐỀ 2: Giải bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Phương pháp: Để giải một bất phương trình dạng $f(x).g(x) > 0$ (hay $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$) với $f(x)$, $g(x)$ là một tam thức bậc 2 ta tìm nghiệm của $f(x)$ và $g(x)$, lập bảng xét dấu.

Dựa vào bảng xét dấu ta kết luận tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

Giải

$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = -3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		$-1/2$		2		$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2$		+	|	+	|	+	0	−	0	+	
$x^2 + 5x + 6$		+	0	−	0	+	|	+	|	+	
f(x)		+	‖	−	‖	+	0	−	0	+	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3) \cup (-2; -\frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $f(x) = (2x^2 - 4x - 6)(6 - x - x^2) < 0$.

Giải

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 3$.

$6 - x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hay $x = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-1		2		3		$+\infty$
$2x^2 - 4x - 6$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$6 - x - x^2$		−	0	+	|	+	0	−	|	−	
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Vậy nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

VẤN ĐỀ 3: Giải hệ bất phương trình bậc hai.

Phương pháp: Để giải hệ bất phương trình bậc hai ta:

* Giải từng bất phương trình của hệ.

* Giao của các tập nghiệm của từng phương trình chính là tập nghiệm của hệ.

Ví dụ 4: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 7x + 2 > 0 & (1a) \\ -2x^2 - x + 3 \geq 0 & (1b) \end{cases}$ (1).

Giải:

Bất phương trình (1a) có tập nghiệm là $S_1 = (-\infty; -2) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$.

Bất phương trình (1b) có tập nghiệm là $S_2 = [-\frac{3}{2}; 1]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (-\frac{1}{3}; 1]$.

VẤN ĐỀ 4: Giải và biện luận bất phương trình bậc hai.

Phương pháp:Để giải và biện luận bất phương trình bậc hai ta căn cứ vào *dấu của Δ và dấu của a* để suy ra dấu của tam thức. Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 5: Giải và biện luận bất phương trình:

$f(x) = mx^2 + 4mx + m + 6 > 0$.

Giải

Ta có: $a = m$

$\Delta' = 3m^2 - 6m$

Bảng xét dấu a và Δ':

m	$-\infty$		0		2		$+\infty$
a		−	0	+	|	+	
Δ'		+	0	−	0	+	

Gọi $x_1 = \dfrac{-2m - \sqrt{\Delta'}}{m}$, $x_2 = \dfrac{-2m + \sqrt{\Delta'}}{m}$ là hai nghiệm nếu có của f(x).

Biện luận:

* $m < 0$: $a < 0$, $\Delta' > 0$ nên $f(x) > 0$ với $x \in (x_2; x_1)$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (x_2; x_1)$.

* $m = 0$: (1) trở thành $0x + 6 > 0$, $\forall x \in R$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S = R$.

* $0 < m < 2$: $a > 0$, $\Delta' < 0$ nên $f(x) > 0$, $\forall x \in R$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S = R$.

* $m = 2$: (1) trở thành $2x^2 + 8x + 8 > 0$, $\forall x \in R \setminus \{-2\}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S = R \setminus \{-2\}$.

* $m > 2$: $a > 0$, $\Delta' > 0$ nên $f(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Kết luận:

* $m < 0$: $S = (x_2, x_1)$.

* $0 \le m < 2$: $S = R$.

* $m = 2$: $S = R \setminus \{-2\}$.

* $m > 2$: $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của m làm cho bất phương trình sau vô nghiệm:

$$f(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m - 2 > 0 \quad (1)$$

Giải

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \le 0$, $\forall x \in R$

* $a = m = 0$: (1) có dạng $2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

* a = m ≠ 0: yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4m + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\frac{1}{4}$.

Vậy m thỏa bài toán $\Leftrightarrow m \le -\frac{1}{4}$.

C/ BÀI TẬP

4.54. Giải các bất phương trình:

a) $5x^2 - 4x - 12 > 0$ b) $-16x^2 + 40x - 25 > 0$

c) $3x^2 - 4x + 4 \le 0$ d) $x^2 - x - 6 \ge 0$

4.55. Giải các bất phương trình:

a) $(1 - 2x)(x^2 + x - 30)(x^2 - 4x + 4) \le 0$

b) $\frac{2x^2 - 7x - 7}{x^2 - 3x - 10} \le 1$ c) $\frac{1}{x^2 - 5x + 4} < \frac{1}{x^2 - 7x + 6}$

d) $x^2 + (x + 1)^2 \le \frac{15}{x^2 + x + 1}$. e) $3x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3 \ge 0$.

4.56. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ (x^2 + x - 6)(x^2 - 2x + 2) < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ (1 - x^2)(4x^2 - 12x + 5) > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ 2x^2 - 11x + 9 < 0 \\ x^3 - x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases}$ d) $-3 \le \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} < 3$

4.57. Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - 3x + 1}}$

4.58. Tìm m để:

a) Phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$ có nghiệm.

b) Bất phương trình $(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 3m - 6 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

c) Bất phương trình $mx^2 + 6mx + 8m - 10 \geq 0$ vô nghiệm.

4.59. Tìm m sao cho với mọi x ta có: $-1 \leq \dfrac{x^2 - 5x + m}{2x^2 + 3x + 2} < 7$.

4.60. Tìm m để hệ sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} < \dfrac{x-4}{x+2} \\ x^2 - (m+1)x + m \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 2mx + m^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 16 - m^2 \leq 0 \end{cases}$.

4.61. Tìm m để

a) Bất phương trình $\left|\dfrac{3x^2 + x + 12}{x^2 - mx + 4}\right| \geq 2$ có tập nghiệm là R.

b) Hàm số $y = \dfrac{3}{\sqrt{(m+1)x^2 + 2mx + 5 + 9m}}$ xác định với mọi $x \in R$.

4.62. Chứng minh rằng $3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x - 2y + 5 \geq 0$ với mọi x, mọi y.

§8. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI.

I. Phương trình chứa trị tuyệt đối

1. Các dạng cơ bản

Dạng 1: $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$.

Ví dụ: Giải phương trình $\left|x^3 - x\right| = \left|x^3 + x^2 - 2\right|$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - x = x^3 + x^2 - 2 \\ x^3 - x = -x^3 - x^2 + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = 0 \\ 2x^3 + x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ (x-1)(2x^2+3x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Dạng 2: $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải phương trình $|x^2+3x| = -3x-5$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-5 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2+3x = -3x-5 \\ x^2+3x = 3x+5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5/3 \\ \begin{cases} x^2+6x+5 = 0 \\ x^2 = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5/3 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $|x-1| = x^3 - x^2 + x - 1$ (2)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 = x^3-x^2+x-1 \end{cases} \text{v} \begin{cases} x < 1 \\ -x+1 = x^3-x^2+x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^3-x^2 = 0 \end{cases} \text{v} \begin{cases} x < 1 \\ x^3-x^2+2x-2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ vx} = 1 \end{cases} \text{v} \begin{cases} x < 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

2. Dạng chứa nhiều dấu trị tuyệt đối

Xét dấu các biểu thức dưới dấu trị tuyệt đối.

Dựa vào bảng xét dấu phân chia các trường hợp để khử dấu trị

tuyệt đối. Giải phương trình thu được. Nghiệm của phương trình là hợp của các nghiệm tìm được trong mỗi trường hợp.

Ví dụ: Giải phương trình $|x-1|+|2x-4|-|4-x|=2$ (1)

Giải

Ta có: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

* $x < 1$: (1) $\Leftrightarrow -x + 1 - 2x + 4 - 4 + x = 2 \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (nhận)

* $1 \le x < 2$: (1) $\Leftrightarrow x - 1 - 2x + 4 - 4 + x = 2 \Leftrightarrow 0x = 3 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

* $2 \le x < 4$: (1) $\Leftrightarrow x - 1 + 2x - 4 - 4 + x = 2 \Leftrightarrow 4x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{4}$ (nhận)

* $x \ge 4$: (1) $\Leftrightarrow x - 1 + 2x - 4 + 4 - x = 2 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (loại)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{11}{4}$.

3. Dạng đặt ẩn số phụ

Dùng ẩn phụ với điều kiện thích hợp đưa phương trình về phương trình không chứa trị tuyệt đối.

Ví dụ: Giải bất phương trình $\left|\frac{3x}{2x-4}\right|-\left|\frac{2x-4}{x}\right|=2$ (1)

Giải

Đặt $t = \left|\frac{2x-4}{x}\right| > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{t} - t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left|\frac{2x-4}{x}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - 4 = x \\ 2x - 4 = -x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 4 \\ x = 4/3 \end{bmatrix}.$$

4. Dạng dùng các điều kiện xảy ra đẳng thức trong các bất đẳng thức chứa trị tuyệt đối

Ta có các bất đẳng thức thường gặp sau:

Với hai số A, B tùy ý, ta có:

a) $|A+B| \le |A|+|B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \ge 0$.

b) $||A|-|B|| \le |A-B|$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A.B \ge 0$.

Ví dụ: Giải phương trình $|x^2-3x|+|x-1|=|x^2-2x-1|$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow |x^2-3x|+|x-1|=|(x^2-3x)+(x-1)|$

$\Leftrightarrow (x^2-3x)(x-1) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \ge 3 \text{ v } 0 \le x \le 1$

II. Bất phương trình chứa dấu trị tuyệt đối

1. Dạng cơ bản

* $|A|<|B| \Leftrightarrow A^2-B^2<0$

* $|A|<B \Leftrightarrow -B<A<B$.

* $|A|>B \Leftrightarrow A<-B$ hoặc $A>B$.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $|x^2-4|+2x<4$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow |x^2-4|<-2x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4<-2x+4 \\ x^2-4>2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8<0 \\ x^2-2x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4<x<2 \\ x<0 \text{ v } x>2 \end{cases} \Leftrightarrow -4<x<0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-4, 0)$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $|x^2+3x+2|+x^2+2x \ge 0$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow |x^2+3x+2| \ge -x^2-2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x+2 \ge -x^2-2x \\ x^2+3x+2 \le x^2+2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x^2+5x+2 \ge 0 \\ x+2 \le 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \le -2 \text{ v } x \ge -1/2 \\ x \le -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \le -2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = $(-\infty, -2]$.

2. Các dạng khác: Ta cũng dùng các cách giải tương tự như phương trình.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $|x-2|+2|x+1| \le x^2$ (1)

Giải

* $x < -1$: (1) $\Leftrightarrow -x + 2 - 2(x + 1) \le x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -3$ v $x \ge 0$

So sánh điều kiện ta được $x \le -3$.

* $-1 \le x < 2$: (1) $\Leftrightarrow -x + 2 + 2(x + 1) \le x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow$

$$x \le \frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ v } x \ge \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

So sánh điều kiện ta được $-1 \le x \le \frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

* $x \ge 2$: (1) $\Leftrightarrow x - 2 + 2(x + 1) \le x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0$ v $x \ge 3$

So sánh điều kiện ta được $x \ge 3$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (-\infty, -3] \cup [-1, \frac{1-\sqrt{17}}{2}] \cup [3, +\infty)$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $2 - \left|\frac{x^2-2}{x}\right| \le \frac{x^4-4x^2+4}{x^2}$ (2)

Giải

Đặt $t = \left|\frac{x^2-2}{x}\right| \ge 0$. Ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2 - t \le t^2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t \le -2 \text{ (loại)} \\ t \ge 1 \text{ (nhận)} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x^2-2}{x}\right| \ge 1 \Leftrightarrow \frac{x^4-4x^2+4}{x^2} \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x^4-5x^2+4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 < x^2 \le 1 \\ x^2 \ge 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \le -2 \\ -1 \le x < 0 \\ 0 < x \le 1 \\ x \ge 2 \end{bmatrix}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là

$S = (-\infty, -2] \cup [-1, 0) \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$

III. Phương trình chứa ẩn trong dấu căn

1. Dạng cơ bản

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \text{ (hay } B \ge 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 5x} = \sqrt{x^2 - 4}$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \ge 0 \\ 2x^2 + 5x = x^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \text{ v } x \ge 2 \\ x^2 + 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \text{ v } x \ge 2 \\ x = -1 \text{ v } x = -4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = -4.$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{4 + 6x - x^2} = 4 - x.$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \ge 0 \\ 4 + 6x - x^2 = (4 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ 2x^2 - 14x + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ x = 1 \text{ v } x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

2. Các dạng khác

Với các phương trình không ở dạng cơ bản, tùy theo mỗi phương trình, ta thường sử dụng các cách sau đây để giải:

a) Bình phương hai vế: Bình phương hai vế của phương trình để khử dấu căn, đưa phương trình đã cho về phương trình mới đơn

giản hơn. Cần chú ý đặt các điều kiện cần thiết để các phép biến đổi là tương đương.

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=\sqrt{(3+x)(6-x)}+3$ (1)

Giải

Điều kiện: $-3 \le x \le 6$.

Khi đó: (1)

$$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}=\left(\sqrt{(3+x)(6-x)}\right)^2+6\sqrt{(3+x)(6-x)}+9$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(3+x)(6-x)}\right)^2+4\sqrt{(3+x)(6-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)}\left(\sqrt{(3+x)(6-x)}+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)}=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ hay } x=6.$$

So sánh điều kiện ta được nghiệm của (1) là $x=-3$ hay $x=6$.

b) *Đặt ẩn phụ*: Nếu phép bình phương dẫn đến một phương trình bậc cao phức tạp thì ta có thể đặt ẩn phụ hoặc biến đổi phương trình đã cho thành phương trình tích. Việc chọn ẩn phụ rất đa dạng, cần linh hoạt để có cách giải tốt nhất.

Khi đặt ẩn phụ cần chú ý các điều kiện sau:

+ Nếu đặt $t=\varphi(x)$, $x \in D$ thì điều kiện để tính được x theo t là $t \in \varphi(D)$.
+ Nếu $x \in [a,b]$ và đặt $x=\varphi(t)$ thì phải chọn $t \in [\alpha,\beta]$ sao cho khi t biến thiên từ α đến β thì x biến thiên từ a đến b.
+ Có thể đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình ẩn t và x.

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$ (2)

Giải

Cách 1: Đặt $u=\sqrt{x^2-3x+3}$ và $v=\sqrt{x^2-3x+6}$.

Ta có: $\begin{cases} u+v=3 \\ v^2-u^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ u-v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 1 hay x = 2.

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 3} \geq 0$

Ta được: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ 6t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 1 hay x = 2.

c) Biến đổi về phương trình tích:

Ví dụ: Giải phương trình $x^3 + (1 + x^2)\sqrt{1 - x^2} = 1 - x\sqrt{1 - x^2}$ (3)

Giải

$$(3) \Leftrightarrow x^3 - 1 + \sqrt{1 - x^2}\ (x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)\left(x - 1 + \sqrt{1 - x^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 1 - x \ (\text{vì } x^2 + x + 1 > 0, \forall x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 1 hay x = 0.

d) Dùng phương pháp đánh giá hai vế:

Nếu ta có $f(x) \leq M$ và $g(x) \geq M$ thì $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) = M$.

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x - 3} + \sqrt{5 - x} = x^2 - 8x + 18$ (4)

Giải

Điều kiện: $3 \leq x \leq 5$.

Ta có:

$$VT = 1.\sqrt{x - 3} + 1.\sqrt{5 - x} \overset{(BCS)}{\leq} \sqrt{1^2 + 1^2}.\sqrt{\left(\sqrt{x - 3}\right)^2 + \left(\sqrt{5 - x}\right)^2} = 2$$

$VP = (x - 4)^2 + 2 \geq 2$.

Vậy $(4) \Leftrightarrow VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 3} = \sqrt{5 - x} \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$ (nhận).

Vậy nghiệm của phương trình là x = 4.

e) Sử dụng các điều kiện xảy ra dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức quen thuộc:

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x^2+x+2}$ (1)

Giải

Điều kiện: $x^2+2x-3\geq 0$ và $5-x\geq 0$.

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{(x^2+2x-3)+(5-x)}$$

Ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$. Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi

$a=0$ v $b=0$.

$$\text{nên } (1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0\\5-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3 \text{ (thỏa điều kiện)}\\x=5\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là $x=-3$ v $x=1$ v $x=5$.

f) Dự đoán và chứng minh phương trình có duy nhất nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x+5}+2\sqrt{2x+1}=9$ (1)

Giải

Ta thấy: $x=4$ là một nghiệm của phương trình (1).

Khi $x>4$ thì $VT(1)>9\Rightarrow$ (1) không có nghiệm thỏa $x>4$.

Khi $-1/2\leq x<4$ thì $VT(1)<9\Rightarrow$ (1) không có nghiệm thỏa $x<4$.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất là $x=4$.

III. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

1. Dạng cơ bản

- $\sqrt{A}<B\Leftrightarrow\begin{cases}A\geq 0\\B>0\\A<B^2\end{cases}$
- $\sqrt{A}\leq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\geq 0\\B\geq 0\\A\leq B^2\end{cases}$
- $\sqrt{A}>B\Leftrightarrow\begin{cases}A\geq 0\\B<0\end{cases}$ hay $\begin{cases}B\geq 0\\A>B^2\end{cases}$
- $\sqrt{A}\geq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\geq 0\\B<0\end{cases}$

hay $\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leq x - 3$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 15 \leq (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \text{ v } x \geq -3 \\ x \geq 3 \\ 4x \leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là S = [3, 5].

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 + 9x} > x + 4$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 < 0 \\ x^2 + 9x \geq 0 \end{cases} \text{v} \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 + 9x > (x+4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x \leq -9 \text{ v } x \geq 0 \end{cases} \text{v} \begin{cases} x \geq -4 \\ x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \leq -9 \\ x > 16 \end{bmatrix}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = $(-\infty, -9] \cup (16, +\infty)$

2. Các dạng khác

Cách giải tương tự như đối với phương trình chứa căn thức.

Cần chú ý: • Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

• Với mọi $a, b \in R$ thì $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$.

Ví dụ: Giải bất phương trình: $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \dfrac{35}{12}$ (1)

Giải

Điều kiện: $|x| > 1$.

• Nếu $x < -1$ thì VT < 0 nên bpt vô nghiệm.

• Nếu $x > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{x^2}{x^2 - 1} + 2\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} > \left(\dfrac{35}{12}\right)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{x^2-1}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}>\left(\dfrac{35}{12}\right)^2$. Đặt $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\geq 0$ ta được:

$t^2+2t>(35/12)^2 \Leftrightarrow (t+1)^2>(37/12)^2 \Leftrightarrow t>25/12$ (do $t\geq 0$)

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{25}{12} \Leftrightarrow x^2<25/16$ hoặc $x^2>25/9$

So sánh điều kiện ta được:

$$1<x^2<\frac{25}{16} \text{ v } x^2>\frac{25}{9} \Leftrightarrow 1<|x|<\frac{5}{4} \text{ v } |x|>\frac{5}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S=\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{4},-1\right)\cup\left(1,\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right).$$

BÀI TẬP

4.63. Giải các phương trình sau:

a) $|x^2-5x+4|=x^2+6x+5$ b) $|x-1|=2x-1$

c) $\left|\dfrac{x^2-2}{x-1}\right|=2$ d) $|x^2-2x+3|=|x+1|$

4.64. Giải các bất phương trình sau:

a) $|-x^2-x-1|\leq 2x+5$ b) $|x^2-x|\leq|x^2-1|$

c) $\left|\dfrac{x^2-4}{x^2+x+2}\right|\leq 1$ d) $\left|\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|\geq 1$

4.65. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2+4x-1}=x+1$

b) $\sqrt{4x^2+101x+64}=2(x+10)$

c) $\sqrt{x^2+2x}=-2x^2-4x+3$

d) $\sqrt{(x+1)(x+2)}=x^2+3x-4$.

e) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1 - x$

f) $2\sqrt{2x-1} = x^2 + 1$

g) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

h) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x^2\sqrt{2}$

i) $(x-3)(x+1) + 2(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 3$

k) $x^2 + 4x + 11 = (2x+3)\sqrt{x^2+9}$

l) $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$

4.66. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+x-6} < x-1$

b) $\sqrt{2x-1} \le 2x-3$

c) $\sqrt{2x^2-1} > 1-x$

d) $\sqrt{x^2-5x-14} \ge 2x-1$

e) $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$

f) $(x-3)\sqrt{x^2-4} \le x^3 - 9$

g) $4(x+1)^2 < (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$.

h) $\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 7 - x^2 - 2x$

i) $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} > 3$

k) $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4$

4.67. Tìm tập xác định của hàm số sau:

a) $y = \sqrt{|x^2+3x-4| - x + 8}$

b) $y = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{|2x-1| - x - 2}}$

c) $y = \sqrt{\frac{1}{x^2+7x+5} - \frac{1}{x^2-2x+5}}$

d) $y = \sqrt{\sqrt{x^2+5x-14}+x+3}$

4.68. Tìm m để phương trình $x^4 + (1 + 2m)x^2 + m^2 - 1 = 0$

a) Vô nghiệm.

b) Có 2 nghiệm phân biệt.

c) Có 4 nghiệm phân biệt.

4.69. Tìm m để phương trình $(m - 1)x^4 - mx + m^2 - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chương V: THỐNG KÊ

§1. TRÌNH BÀY SỐ LIỆU

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. * Thống kê thường được bắt đầu bằng việc lập bảng số liệu ban đầu bao gồm một tập hợp các đơn vị điều tra và dấu hiệu cần thống kê của đơn vị điều tra đó.
   * Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra gọi là mẫu.
   * Số phần tử của mẫu gọi là kích thước mẫu, kí hiệu là N
   * Dãy các dấu hiệu thu được trên mẫu gọi là mẫu số liệu
2. Số lần xuất hiện của giá trị x_i trong mẫu số liệu được gọi là tần số n_i của x_i.

   Tần suất f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước của mẫu

$$f_i = \frac{n_i}{N}\%$$

3. Để trình bày mẫu số liệu được gọn gàng và rõ ràng người ta dùng bảng phân bố tần số, tần suất có dạng sau.

Giá trị của x	Tần số (n)	Tần suất (f%)
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
..	..	..
x_k	n_k	f_k
Cộng	N	100%

4. Trong trường hợp có nhiều số liệu, để trình bày được súc tích hơn người ta thường ghép các số liệu thành các lớp có độ dài bằng nhau tạo thành bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp có dạng.

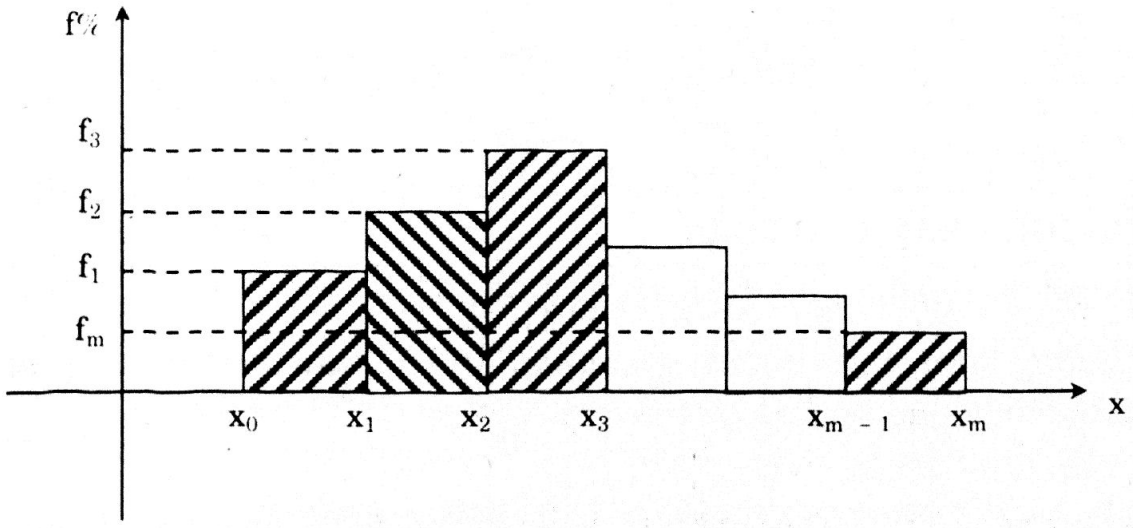
Giá trị được chia lớp của x	Giá trị đại diện của lớp	Tần số của lớp	Tần suất của lớp
$[x_0; x_1)$	$C_1 = \frac{x_0 + x_1}{2}$	n_1	f_1
$[x_1; x_2)$	$C_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$	n_2	f_2

$[x_2; x_3)$	$C_3 = \frac{x_2 + x_3}{2}$	n_3	f_3
..	..	..	..
$[x_{m-1}; x_m)$	C_m	n_m	f_m
Tổng		N	100%

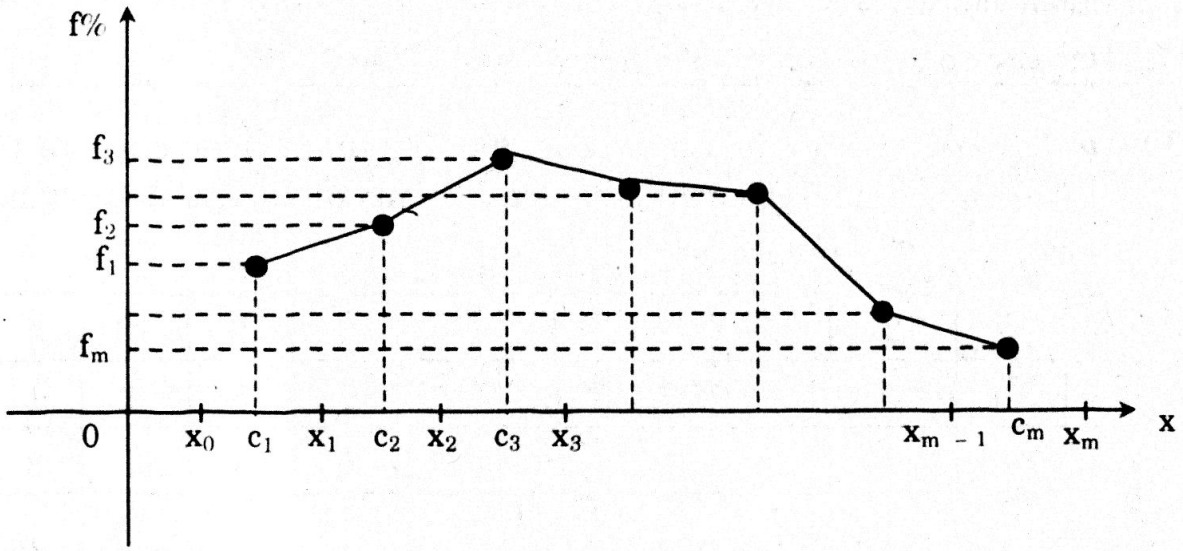
Ở đây tần số của lớp là số các số liệu thuộc lớp đó.

5. Để có hình ảnh trực quan, dễ hiểu, dễ nhớ và gây ấn tượng người ta vẽ các biểu đồ của các bảng phân bố tần suất (hoặc tần số).

* Biểu đồ tần suất hình cột

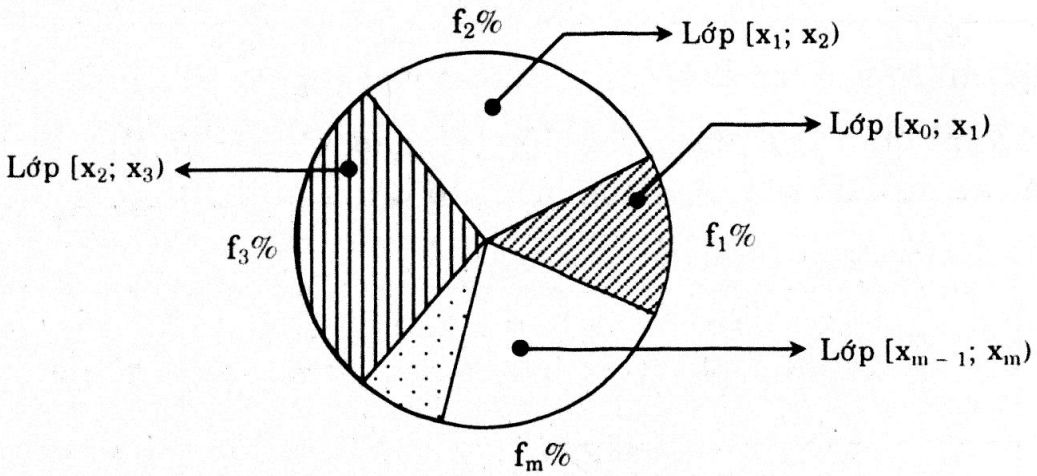


* Biểu đồ gấp khúc tần suất



6. * Để thấy được tỉ lệ của từng thành phần so với toàn thể của bảng phân bố tần suất ghép lớp người ta vẽ biểu đồ hình quạt.

* Trong biểu đồ hình quạt người ta chia hình tròn thành các hình quạt, mỗi hình quạt biểu diễn một lớp và có diện tích tỉ lệ với tần suất của lớp đó



B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Lập bảng phân bố tần số, tần suất

***Phương pháp*:** Để lập bảng phân bố tần số, tần suất từ bảng số liệu ban đầu, ta thực hiện các bước:

– Sắp thứ tự mẫu số liệu

– Tính tần số n_i của các giá trị x_i bằng cách đếm số lần x_i xuất hiện.

– Tính tần suất f_i của x_i theo công thức $f_i = \frac{n_i}{N}\%$, với N là kích thước của mẫu

– Đặt các số liệu x_i, n_i, f_i vào bảng

Ví dụ 1.1. Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 150 công nhân của một nhà máy A, người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

a) Trong cuộc điều tra trên hãy xác định tập hợp thống kê, dấu hiệu, mẫu và kích thước mẫu.

b) Kí hiệu dấu hiệu là X, hãy xác định mẫu số liệu, tính tần số, tần suất của các giá trị trong mẫu số liệu và lập bảng phân phối tần số – tần suất của mẫu số liệu đó.

Giải

a) – Tập hợp thống kê là tập hợp bao gồm 150 công nhân của nhà máy A:

– Dấu hiệu là tuổi nghề của mỗi công nhân

– Mẫu là tập con chỉ bao gồm các công nhân được điều tra

– Kích thước của mẫu là 30

b) Mẫu số liệu, tần số, tần suất của các giá trị trong mẫu số liệu được thể hiện trong bảng phân bố tần số – tần suất như sau:

Tuổi nghề	Tần số	Tần suất
1	1	3,34%
2	3	10%
3	2	6,66%
4	6	20%
5	5	16,66%
6	1	3,34%
7	5	16,66%
8	3	10%
9	2	6,66%
10	1	3,34%
14	1	3,34%
	Tổng: 30	Tổng: 100%

Ví dụ 1.2. Điểm số 30 lần bắn của xạ thủ A (mỗi lần bắn 1 viên đạn) được cho bởi bảng số liệu ban đầu sau:

8	9	10	9	9	8	7	6	8	10
10	7	10	9	8	10	8	9	8	7
10	7	7	9	9	6	9	8	10	8

Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất của mẫu số liệu đó

Giải

Bảng phân bố tần số và tần suất của mẫu số liệu trên là

Điểm số (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
6	2	6,67%
7	5	16,67%
8	8	26,67%
9	8	26,67%
10	7	23,33%
	30	100,00%

Ví dụ 1:3. Điểm môn toán của 20 học sinh lớp 10 được cho bởi bảng số liệu ban đầu như sau:

4	3	5	5	6
0	5	4	6	5
1	9	9	6	5
1	5	8	9	10

Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất tương ứng

Giải

Bảng phân bố tần số – tần suất điểm môn toán là

Điểm số (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
0	1	5,00%
1	2	10,00%
3	1	5,00%
4	2	10,00%
5	6	30,00%
6	3	15,00%
8	1	5,00%
9	3	15,00%
10	1	5,00%
	N = 20	100,00%

VẤN ĐỀ 2: Lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp

Phương pháp: Để lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp từ bảng số liệu ban đầu ta thực hiện các bước:

– Nhóm các giá trị của mẫu số liệu thành từng lớp $[x_i, x_{i+1})$

+ Mỗi lớp có bề rộng bằng nhau $d = x_{i+1} - x_i$

+ x_i là cận dưới, x_{i+1} là cận trên

– Tính giá trị trung tâm (hay giá trị đại diện) tâm của mỗi lớp:

$$c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

(Giá trị trung tâm của mỗi lớp dùng để đại diện cho lớp đó).

– Tính tần số của từng lớp $[x_i, x_{i+1})$ bằng cách đếm số lần n_i các giá trị của mẫu số liệu thuộc khoảng $[x_i, x_{i+1})$

– Tính tần suất của từng lớp $[x_i, x_{i+1})$ theo công thức:

$$f_i = \frac{n_i}{N}\%$$

Ví dụ 2. Điều tra về năng suất lúa của 40 hợp tác xã nông nghiệp, người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau (tính theo tạ/ha):

31,8	28,7	31,2	33,1	35,1	29,1	33,9	31,2	33,7	34,9
39,5	33,7	29,4	31,8	26,9	28,3	34,3	36,6	23,7	34,6
35,7	29,8	33,8	35,2	34,9	34,9	34,3	30,6	38,9	32,2
38,4	30,2	32,4	34,8	28,9	33,1	38,1	34,4	32,6	35,8

Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp của bảng số liệu trên

Giải

THỐNG KÊ NĂNG SUẤT LÚA

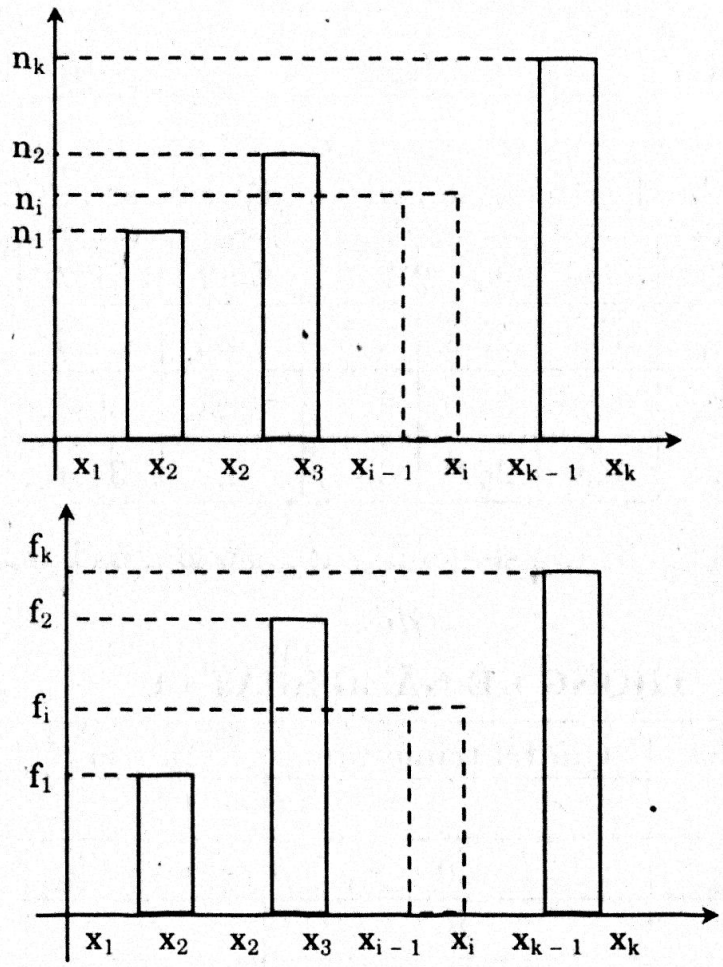
Năng suất (Tạ/ha)	Giá trị trung tâm	Tần số	Tần suất
Dưới 29		5	12,5%
[29; 31)	30	5	12,5%
[31; 33)	32	7	17,5%
[33; 35)	34	15	37,5%
[35; 37)	36	4	10%

[37; 39)	38	3	7,5%
[39; 41)	40	1	2,5%
		n = 40	100%

VẤN ĐỀ 3: Vẽ biểu đồ hình cột

Phương pháp:

- Vẽ hai đường thẳng vuông góc
- Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số) ta đánh dấu các khoảng xác định lớp.
- Tại mỗi khoảng ta dựng một cột hình chữ nhật với đáy là khoảng đó còn chiều cao bằng tần số hoặc tần suất của lớp mà khoảng đó xác định
- Hình thu được là biểu đồ hình cột tần số hoặc tần suất.

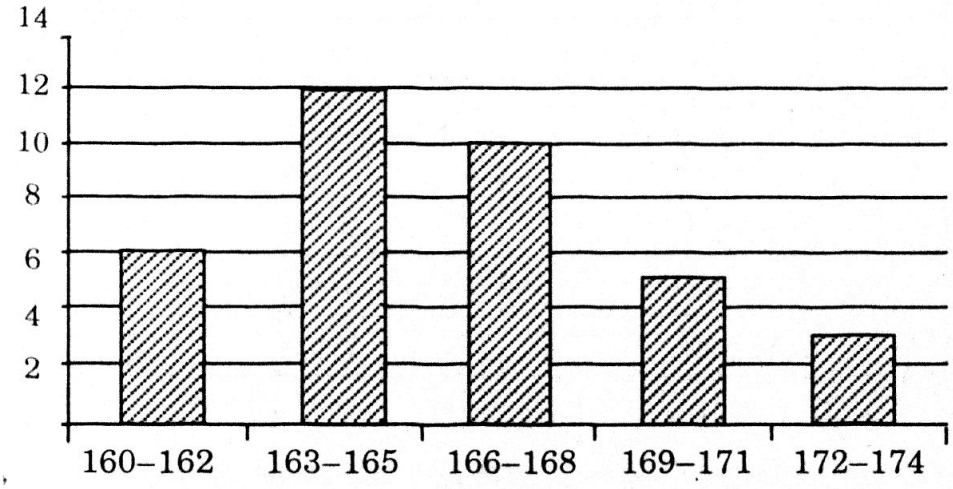


Ví dụ 3:1. Thống kê chiều cao của 36 học sinh nam của một trường Trung học phổ thông (THPT) ta thu được bảng phân phối tần số – tần suất sau:

Nhóm	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	160 – 162	6	16,7
2	163 – 165	12	33,3
3	166 – 168	10	27,8
4	169 – 171	5	13,9
5	172 – 174	3	8,3
		N = 36	100%

Hãy vẽ biểu đồ hình cột tần số tương ứng.

Giải

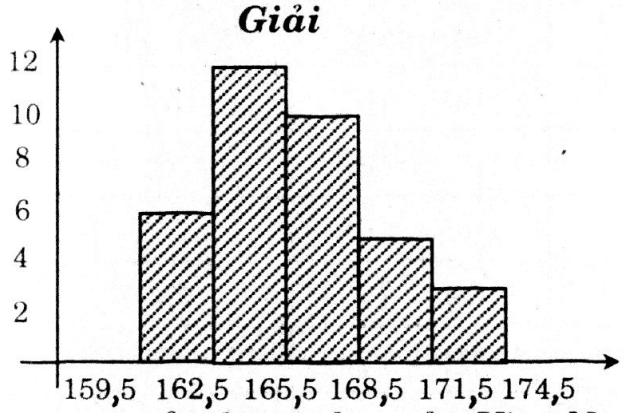


Ví dụ 3:2. Thống kê chiều cao của 36 học sinh nam của một trường THPT ta được bảng phân phối tần số – tần suất ghép lớp sau:

Nhóm	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	[159,5; 162,5)	6	17%
2	[162,5; 165,5)	12	33%
3	{165,5; 168,5)	10	28%
4	[168,5; 171,5)	5	14%
5	[171,5; 174,5)	3	8%
		36	100%

Hãy vẽ biểu đồ hình cột tần số tương ứng

Giải



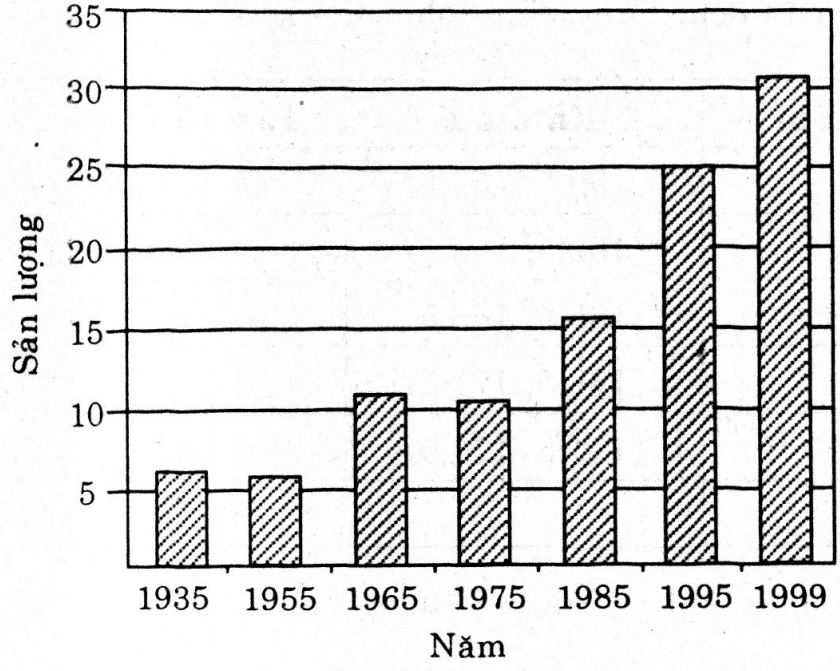
Ví dụ 3:2. Sự gia tăng sản lượng lúa của Việt Nam từ năm 1935 đến năm 1999 được cho bởi bảng sau:

Năm	Sản lượng
1935	7
1955	6,2
1965	11,1
1975	10,5
1985	15,9
1995	25
1999	31,4

Hãy vẽ biểu đồ hình cột tương ứng

Giải

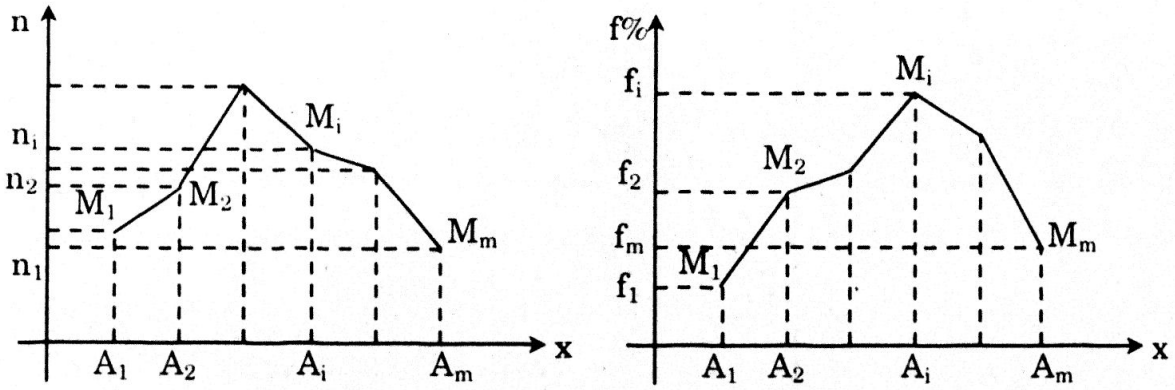
Sự gia tăng sản lượng lúa của Việt Nam 1935 – 1999



VẤN ĐỀ 4: Vẽ đường gấp khúc tần số, tần suất

Phương pháp:

- Vẽ hai đường thẳng vuông góc làm hai trục
- Trên trục nằm ngang ta đánh dấu các điểm A_1, A_2, ..., A_m, với A_i là trung điểm, của nửa khoảng xác định lớp thứ i (i = 1, 2,..., m)
- Tại mỗi điểm A_i ta dựng đoạn thẳng A_iM_i vuông góc với trục nằm ngang và có độ dài bằng tần số thứ i (tức n_i).
- Vẽ các đoạn thẳng M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4,..., $M_{m-1}M_m$ ta được đường gấp khúc tần số.
- Nếu độ dài các đoạn thẳng A_iM_i được lấy bằng tần suất của lớp thứ i (tức f_i) thì khi vẽ các đoạn thẳng M_1M_2, M_2M_3,..., $M_{m-1}M_m$ ta được đường gấp khúc tần suất.



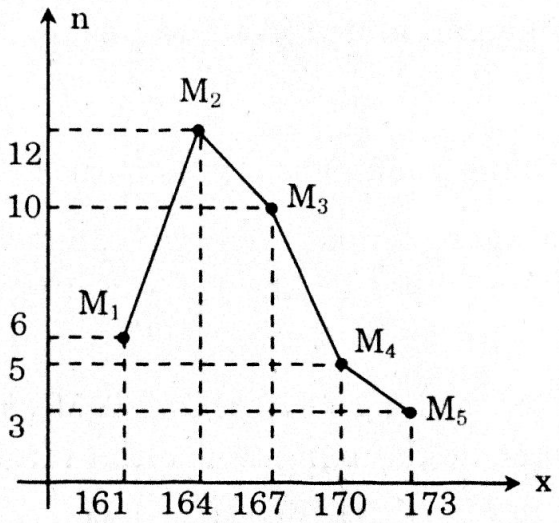
Ví dụ 4: Ta xem lại mẫu số liệu thống kê chiều cao của 36 học sinh trong ví dụ 3.2 ở trên.

Hãy vẽ đường gấp khúc tần số và đường gấp khúc tần suất tương ứng

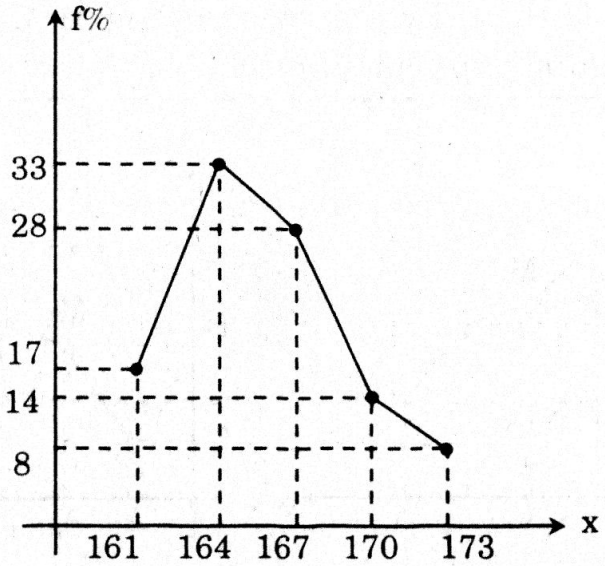
Giải

Ta có 5 nhóm, vậy m = 5. Các trung điểm tương ứng của các nhóm là $A_1 = 161$, $A_2 = 164$, $A_3 = 167$, $A_4 = 170$, $A_5 = 173$. Các tần số tương ứng là $n_1 = 6$, $n_2 = 12$, $n_3 = 10$, $n_4 = 5$, $n_5 = 3$.

Vậy ta có đường gấp khúc tần số là:



Cũng theo giả thuyết trong ví dụ 3.2 ta có các tần suất tương ứng là $f_1 = 17\%$, $f_2 = 33\%$, $f_3 = 28\%$, $f_4 = 14\%$, $f_5 = 8\%$. Vậy ta có đường gấp khúc tần suất là:



VẤN ĐỀ 5: Vẽ biểu đồ hình quạt

Phương pháp:

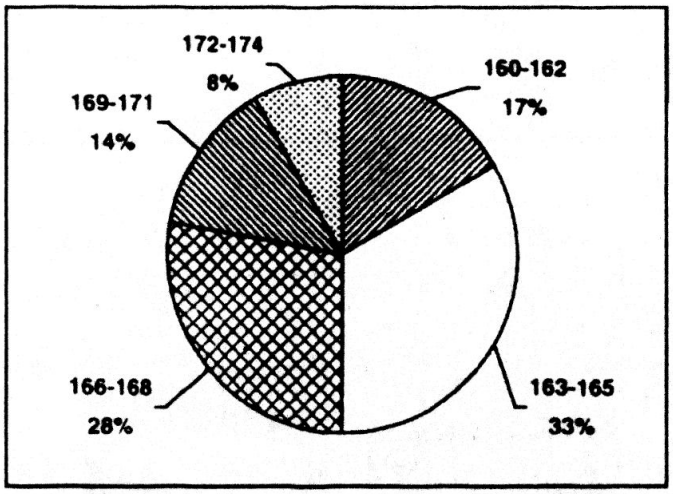
- Vẽ hình tròn
- Chia hình tròn thành các hình quạt ứng với các lớp. Mỗi lớp được vẽ tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của lớp đó, hoặc tỉ lệ với tỉ số phần trăm của cơ cấu của mỗi thành phần.

Ví dụ 5:1. Vẽ biểu đồ hình quạt thống kê chiều cao của 36 học sinh nam của một trường THPT được cho bởi bảng phân phối tần số – tần suất sau:

Nhóm	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	160 – 162	6	16,7
2	163 – 165	12	33,3
3	166 – 168	10	27,8
4	169 – 171	5	13,9
5	172 – 174	3	8,3
		N = 36	100%

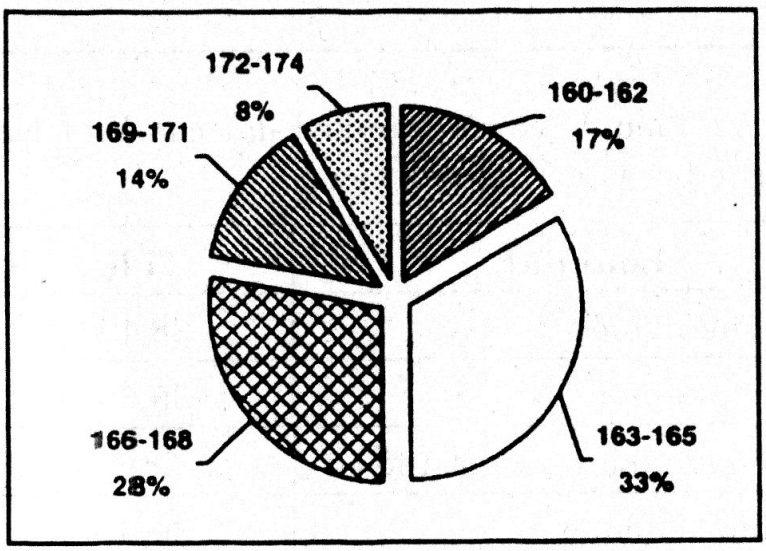
Giải

Biểu đồ thống kê chiều cao của học sinh THPT

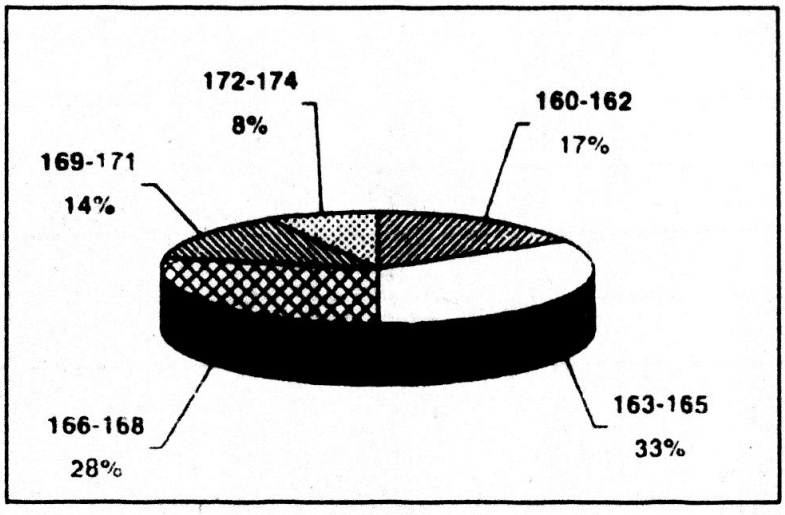


Chú ý: Theo nguyên tắc tổng quát đã nêu ở trên, biểu đồ hình quạt còn có các biến dạng sau:

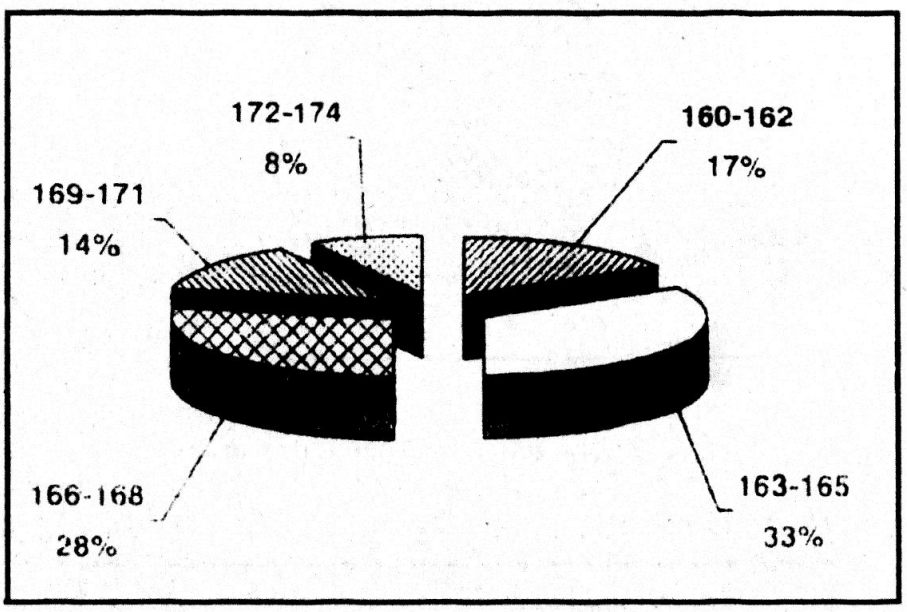
1. *Biểu đồ hình quạt rời*



2. *Biểu đồ hình quạt 3 chiều*



3. *Biểu đồ hình quạt 3 chiều rời*



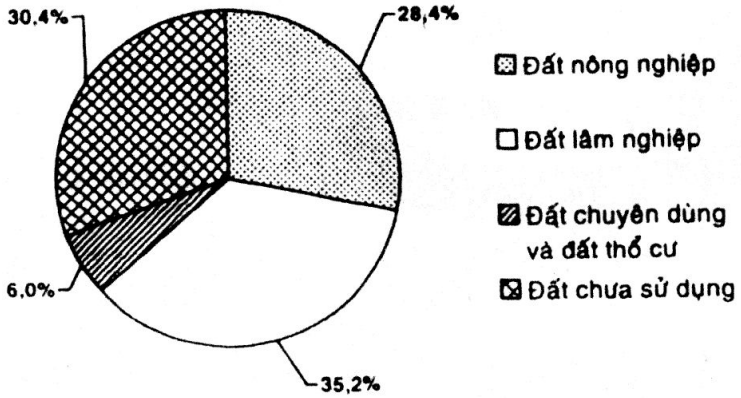
Ví dụ 5:2. Vẽ biểu đồ cơ cấu các loại đất của Việt Nam năm 2000 được cho bởi bảng thống kê sau:

Loại đất	Tỉ lệ
Đất nông nghiệp	28,4%
Đất lâm nghiệp	35,2%
Đất chuyên dùng và đất thổ cư	6,0%
Đất chưa sử dụng	30,4%

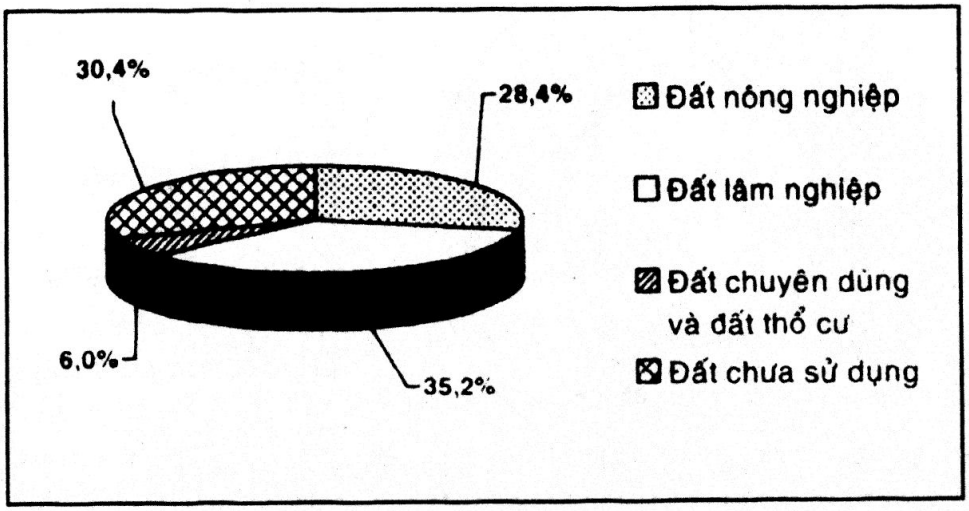
Giải

Ta có các dạng biểu đồ như sau:

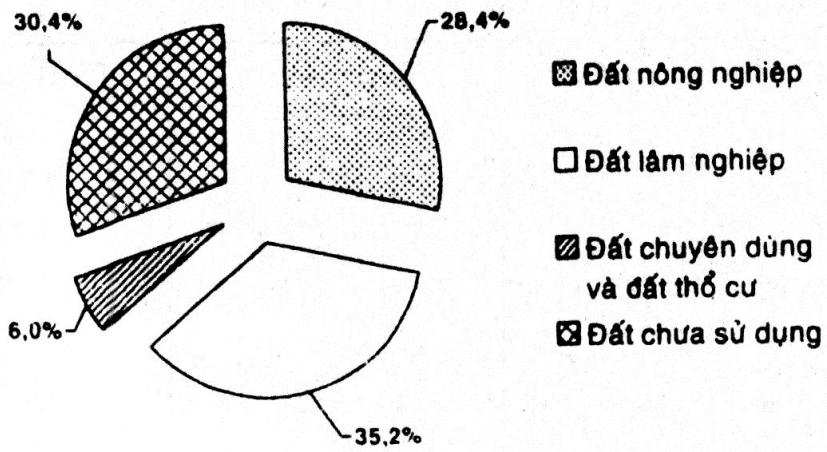
a Biểu đồ cơ cấu các loại đất của Việt Nam năm 2000



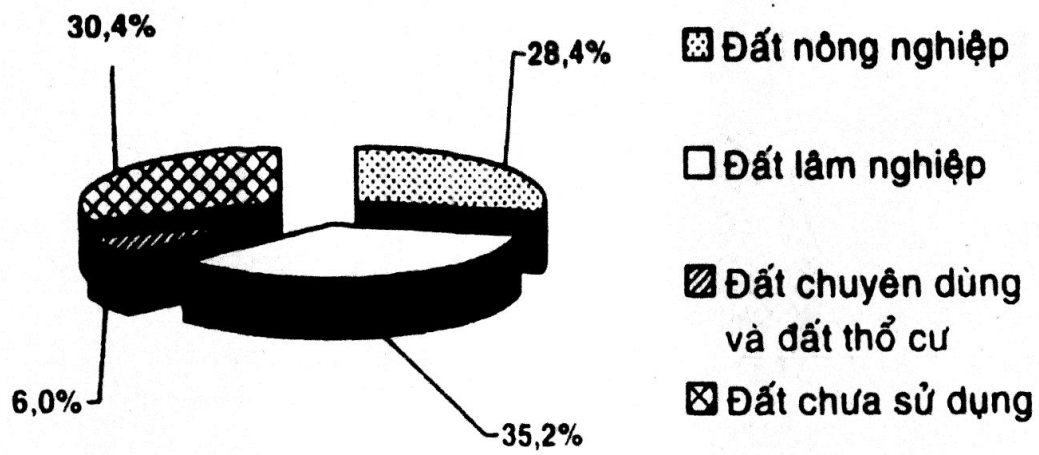
b) Biểu đồ cơ cấu các loại đất của Việt Nam năm 2000



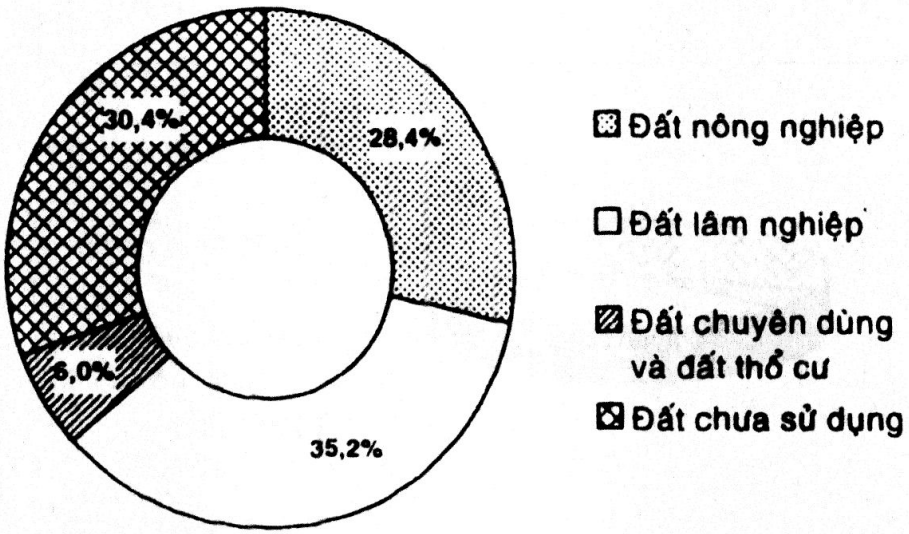
c) Biểu đồ cơ cấu các loại đất của Việt Nam năm 2000



d) Biểu đồ cơ cấu các loại đất của Việt Nam năm 2000



e) Biểu đồ cơ cấu các loại đất của Việt Nam năm 2000



C/ LUYỆN TẬP

5.1. Thống kê điểm thi môn toán trong kì thi vừa qua của 400 em học sinh cho ta kết quả sau đây:

Điểm bài thi (✗)	Tần số (n)	Tần suất (f)
0	...	1,5%
1	15	3,75%
2	43	10,75%
3	53	13,25%
4	85	21,25%
5	...	18%
6	55	...

7	33	...
8	18	...
9	10	...
10	10	...
	N = 400	...

Điền tiếp các số vào các chỗ trống (...) ở cột tần số và cột tần suất trong bảng

5.2. Hãy điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất ở trong bảng sau:

Lớp	Khoảng	Tần số	Tần suất
1	159,5 – 162,5	6	16,7%
2	162,5 – 165,5	12	33,3%
3	165,5 – 168,5	10	27,8%
4	168,5 – 171,5	5	...
5	171,5 – 174,5	3	...
		N = 36	...

5.3. Cho bảng số liệu thống kê năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh từ Nghệ An trở vào:

30	30	25	25	35	45	40	40	35	45	35
25	45	30	30	30	40	30	25	45	45	
35	35	30	40	40	40	35	35	35	35	

Hãy lập:

- Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc
- Bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc

5.4. Cho bảng số liệu thống kê thời gian (phút) hoàn thành một bài tập toán của một học sinh lớp 10A:

20,8	20,7	23,1	20,7	20,9	20,9	23,9	21,6
25,3	21,5	23,8	20,7	23,3	19,8	20,9	20,1
21,3	24,2	22,0	23,8	24,1	21,1	22,8	19,5
19,7	21,9	21,2	24,2	24,3	22,2	23,5	23,9
22,8	22,5	19,9	23,8	25,0	22,9	22,8	22,7

Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp với các lớp sau:

[19,5; 20,5); [20,5; 21,5); [21,5; 22,5); [22,5; 23,5); [23,5; 24,5); [24,5; 25,5)

5.5. Cho bảng số liệu thống kê giá trị thành phần quy ra tiền (đơn vị: nghìn đồng) trong 30 ngày sản xuất của một phân xưởng hóa chất:

180	186	190	204	192	200	201	203	191	202
200	212	205	211	240	213	216	208	209	222
221	220	203	225	206	228	231	220	239	210

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

[180; 192); [192; 204); [204; 216); [216; 228); [228; 240)

b) Biết rằng định mức lao động của phân xưởng là "mỗi ngày phải sản xuất được tối thiểu 204 nghìn đồng", hãy xác định xem số ngày mà phân xưởng hoàn thành định mức lao động chiếm một tỉ lệ bao nhiêu phần trăm (trong 30 ngày được khảo sát).

5.6. Điều tra về số đĩa CD của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số – tần suất sau

Lớp	**Khoảng**	**Tần số**	**Tần suất**
1	1 – 10	5	...
2	11 – 20	29	...
3	21 – 30	21	...
4	31 – 40	16	...
5	41 – 50	7	...
6	51 – 60	2	...
		N = 80	...

a) Điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số

c) Vẽ biểu đồ hình cột tần suất

Vẽ biểu đồ hình quạt

5.7. Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ty trong một tháng như sau (đơn vị triệu đồng):

120	121	129	114	95	88	109	147	118	148
128	71	93	67	62	57	103	135	97	166
83	114	66	156	88	64	49	101	79	120
75	113	155	48	104	112	79	87	88	141
55	123	152	60	83	144	84	95	90	27

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu, đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Lập bảng tần số – tần suất ghép lớp gồm bảy lớp: Lớp đầu tiên là khoảng 26,5 – 48,5, lớp tiếp theo là khoảng 48,5 – 70,5...

c) Vẽ biểu đồ

5.8. Cho bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp sau: Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh từ 1961 đến hết 1990 (30 năm).

Các lớp của nhiệt độ X (^{0}C)	**X_1^0**	**Tần suất f_1 (%)**
[15; 17)	16	16,7
[17; 19)	18	43,3
[19; 21)	20	36,7
[21; 23)	22	3,3
Cộng		100%

Hãy mô tả bảng trên bằng cách vẽ:

a) Biểu đồ tần suất hình cột.

b) Đường gấp khúc tần suất

5.9. a) Hãy mô tả bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 5 bằng cách vẽ:

- Biểu đồ tần suất hình cột
- Đường gấp khúc tần số

b) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột, hãy nêu nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

5.10. Thống kê điểm toán 40 học sinh của một lớp 10 người ta thu được mẫu số liệu ban đầu như sau:

5	6	6	5	7	1	2	4	6	9
4	5	7	5	6	8	10	5	5	7
2	1	3	3	6	4	6	5	5	9
8	7	2	1	8	6	4	4	6	5

a) Hãy lập bảng phân phối tần số, tần suất

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số

c) Vẽ biểu đồ hình cột tần suất

d) Vẽ biểu đồ đa giác tần số

e) Vẽ biểu đồ hình quạt

f) Hãy lập bảng phân phối tần số ghép lớp theo các lớp sau:

[1,2]; [3,4]; [5,6]; [7,8]; [9; 10]

5.11. Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của tháng như sau:

85	81	65	58	94	30	51	92	85	42
55	37	31	82	63	33	44	93	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

a) Hãy lập bảng phân phối tần số, tần suất ghép lớp đầu tiên là [25 – 34], lớp tiếp theo là [35 – 44]..., lớp cuối cùng là [85 – 94].

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số

c) Vẽ biểu đồ hình cột tần suất

5.12. Sự gia tăng sản lượng lúa của Việt Nam được cho bởi bảng thống kê sau đây:

Năm	1935	1955	1965	1975	1985	1995	2000
Sản lượng lúa (triệu tấn)	7,0	6,2	11,1	10,5	15,9	25	31,4

Hãy vẽ biểu đồ hình cột

5.13. Tỉ lệ xuất, nhập khẩu của Việt Nam được cho bởi bảng số liệu sau:

Năm	Xuất khẩu (%)	Nhập khẩu (%)
1980	20,5	79,5
1990	46,6	53,4
1992	50,4	49,6
1997	44,1	55,9

a) Hãy vẽ biểu đồ cột của xuất khẩu

b) Hãy vẽ biểu đồ cột của nhập khẩu

c) Hãy vẽ biểu đồ chồng về tỉ lệ xuất nhập khẩu

5.14. Hiện trạng cơ cấu các loại đất của nước ta vào năm 2000 được cho bởi bảng thống kê sau:

Đất nông nghiệp	28,4%
Đất lâm nghiệp	35,2%
Đất chuyên dùng và đất thổ cư	6%
Đất chưa sử dụng	30,4%

Hãy vẽ biểu đồ hình quạt biểu diễn số liệu thống kê trên

5.15. Cơ cấu kinh tế của Việt Nam trong năm 1990 và 1996 được cho bởi bảng thống kê sau

Năm	Tổng sản phẩm trong nước (tỉ đồng)	Nông, lâm ngư nghiệp	Công nghiệp và xây dựng	Dịch vụ
1990	41,955	16,252	9,513	16,190
1996	258,609	70,334	79,501	108,774

Hãy vẽ hai biểu đồ hình quạt biểu diễn số liệu thống kê trên với bán kính hình tròn năm 1996 lớn hơn bán kính hình tròn năm 1990 2,5 lần. Hãy giải thích tại sao?

5.16. Sản lượng điện của Việt Nam từ năm 1990 đến năm 2001 được cho bởi bảng thống kê sau:

Năm	1990	1992	1994	1996	1998	2001
Sản lượng điện (triệu Kwh)	8790	9818	12476	16962	21694	30801

Hãy vẽ biểu đồ đa giác

5.17. Vẽ biểu đồ hình cột và biểu đồ hình đa giác biểu diễn sự gia tăng dân số Việt Nam theo bảng thống kê dưới đây:

Năm	1901	1956	1981	1999
Số dân (triệu người)	13,0	27,5	54,9	76,3

§2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐẠI DIỆN CHO CÁC SỐ LIỆU THỐNG KÊ.

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. *Số trung bình*

– Nếu mẫu số liệu gồm N số liệu thống kê, trong đó các giá trị khác nhau là $x_1, x_2,..., x_k$, các giá trị này có tần số tương ứng là $n_1, n_2,..., n_k$ (tất nhiên $n_1 + n_2 +... + n_k = N$) thì số trung bình của các số liệu thống kê chính là số trung bình cộng của chúng.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(n_1x_1 + n_2x_2 +... + n_kx_k) \quad (1)$$

Nếu dùng định nghĩa tần suất $f_i = \frac{n_i}{N}$ ta có:

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 +... + f_kx_k$$

– Nếu mẫu số liệu được phân thành m lớp, với phần tử đại diện của lớp thứ i là c_i thì ta định nghĩa số trung bình của mẫu số liệu là

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(n_1c_1 + n_2c_2 +... + n_mc_m) \quad (2)$$

$$= f_1c_1 + f_2c_2 +... + f_mc_m,$$

trong đó n_i là tần số của lớp thứ i (tức là số các số liệu thuộc lớp đó)

2. *Số trung vị*

Sắp thứ tự N số liệu thống kê thành một dãy không giảm. Nếu N lẻ thì số đứng giữa của dãy này được gọi là số trung vị M_e.

Nếu N chẵn thì số trung vị M_e được coi là trung bình cộng của hai số đứng giữa.

3. *Mốt*

Giá trị số liệu tần số lớn nhất trong một mẫu số liệu được gọi là ***mốt*** của mẫu số liệu và ký hiệu là M_0.

Nếu trong mẫu số liệu có hai giá trị cùng có tần số lớn nhất ta coi mẫu số liệu đó có hai mốt là hai giá trị này.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Tính số trung bình

Phương pháp: Tùy theo mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số hoặc được cho bởi bảng tần số ghép lớp mà ta dùng công thức (1) hoặc công thức (2) để tính số trung bình.

Ví dụ 1.1: Trong một kì thi học sinh giỏi toán với thang điểm 20, điểm của 150 học sinh được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Tần số	1	3	5	8	10	17	29	37	22	13	4	1

Tính số trung bình

Giải

Ta có $x_1 = 9$, $n_1 = 1$; $x_2 = 10$, $n_2 = 3$; $x_3 = 11$, $n_3 = 5$;...; $x_{10} = 18$, $n_{10} = 13$; $x_{11} = 19$, $n_{11} = 4$; $x_{12} = 20$; $n_{12} = 1$.

Áp dụng công thức (1) ta được số trung bình là

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_{12}x_{12}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{11}$$

$$= \frac{1}{150}(1 \times 9 + 3 \times 10 + 5 \times 11 + 8 \times 12 + ... + 13 \times 18 + 4 \times 19 + 1 \times 20$$

$$= \frac{2289}{150} = 15{,}26$$

Ví dụ 1:2. Các số liệu thống kê khối lượng của 200 củ khoai tây được phân thành chín lớp căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị là gam), ta được kết quả sau:

Từ 10 đến 19 gam : 2 củ, từ 20 đến 29 gam : 16 củ,

Từ 30 đến 39g : 24 củ, từ 40 đến 49g : 78 củ,

Từ 50 đến 59g : 46 củ, từ 60 đến 69g : 16 củ,

Từ 70 đến 79g : 11 củ, từ 80 đến 89g : 5 củ,

Từ 90 đến 99g : 2 củ.

Giải

Trước hết ta tính đại diện của mỗi lớp, bằng trung bình cộng hai nút của khoảng

$c_1 = 14,5$; $c_2 = 24,5$; $c_3 = 34,5$; $c_4 = 44,5$;

$c_5 = 54,5$; $c_6 = 64,5$; $c_7 = 74,5$; $c_8 = 84,5$; $c_9 = 94,5$.

Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

Lớp	Khoảng	Giá trị đại diện	Tần số
1	10 – 19	14,5	2
2	20 – 29	24,5	16
3	30 – 39	34,5	24
4	40 – 49	44,5	78
5	50 – 59	54,5	46
6	60 – 69	64,5	16
7	70 – 79	74,5	11
8	80 – 89	84,5	5
9	90 – 99	94,5	2

Từ đó áp dụng công thức (2): $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i c_i$ ta tính được

$$\bar{x} = \frac{1}{200}(2 \times 14,5 + 16 \times 24,5 + ... + 2 \times 94,5) =$$

$$= \frac{9690}{200} = 48,45$$

Vậy khối lượng trung bình của một củ khoai tây là 48,45 gam.

VẤN ĐỀ 2: Tính số trung vị và mốt

Phương pháp: Để tìm số trung vị của một mẫu số liệu có N phần tử, trước hết ta sắp xếp các số liệu theo thứ tự không giảm

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_N$$

Nếu N lẻ thì số trung vị $M_e = x_{\frac{N+1}{2}}$

Nếu N chẵn thì $M_e = \frac{1}{2}(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1})$

Để tính mốt, ta lập bảng phân bố tần số của x_i rồi tìm tần số lớn nhất.

Ví dụ 2: Thống kê điểm kiểm tra môn toán học kỳ 1 của hai tổ lớp 10A cho kết quả sau:

Tổ 1 có 12 học sinh, trong đó có 2 em đạt điểm 5; 4 em đạt điểm 6; 1 em đạt điểm 7; 3 em đạt điểm 8; 1 em đạt điểm 9 và 1 em đạt điểm 10.

Tổ 2 cũng có 12 học sinh, trong đó có 1 em đạt điểm 3; 2 em đạt điểm 5; 1 em đạt điểm 6; 2 em đạt điểm 7; 4 em đạt điểm 8; 1 em đạt điểm 9 và 1 em đạt điểm 10.

a) Hãy lập bảng phân bố tần số cho mỗi tổ và tính điểm số trung bình của mỗi tổ.

b) Tính số trung vị của mỗi tổ

c) So sánh số trung bình và số trung vị của mỗi tổ, từ đó nêu nhận xét về kết quả học tập của hai tổ.

d) Tìm mốt của mỗi bảng của các tổ

Giải

a) Bảng phân bố tần số kết quả kiểm tra của tổ 1:

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	0	0	2	4	1	3	1	1

Bảng phân bố tần số kết quả kiểm tra của tổ 2:

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	0	2	1	2	4	1	1

Điểm số trung bình của tổ 1 là: $\frac{84}{12} = 7$ (điểm)

Điểm số trung bình của tổ 2 là: $\frac{84}{12} = 7$(điểm)

Vậy điểm trung bình của hai tổ giống nhau

b) Dãy kết quả sắp theo thứ tự không giảm của hai tổ tương ứng là:

Tổ 1: 5; 5; 6; 6; 6; 6; 7; 8; 8; 8; 9; 10

Tổ 2: 3; 5; 5; 6; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 10

Hai số đứng giữa của tổ 1 là 6 và 7, vậy số trung vị là $\frac{6+7}{2} = 6,5$

Hai số đứng giữa của tổ 2 là 7 và 8, vậy số trung vị là $\frac{7+8}{2} = 7,5$

Ta thấy số trung vị của tổ 2 lớn hơn số trung vị của tổ 1

c) Từ kết quả trên ta thấy mặc dầu điểm số trung bình của hai tổ ngang nhau nhưng số trung vị của tổ 2 lớn hơn. Điều này thể hiện tổ 2 có nhiều người trên điểm số trung bình hơn tổ 1, cụ thể là tổ 1 có 6 người từ 7 điểm trở lên, còn tổ 2 có đến 8 người từ 7 điểm trở lên.

d) Đối với bảng phân bố tần số của tổ 1 ta thấy 4 là tần số lớn nhất ứng với điểm số là 6

Vậy mốt bằng 6

Đối với bảng của tổ 2 ta thấy 4 cũng là tần số lớn nhất ứng với điểm số là 8. Vậy mốt bằng 8

C/ LUYỆN TẬP (xem cuối §3)

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CHỈ ĐỘ PHÂN TÁN CỦA CÁC SỐ LIỆU

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Để đo độ phân tán (so với số trung bình) của dãy số liệu thống kê $x_1, x_2, ..., x_N$, ta tính độ lệch của mỗi số liệu thống kê đối với số trung bình $\bar{x}$: $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, ..., x_N - \bar{x}$. Lấy bình phương các độ lệch này và tính trung bình cộng của chúng ta được một số, gọi là phương sai của dãy số liệu đã cho, kí hiệu là s^2:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_N - \bar{x})^2}{N} \quad (3)$$

Phương sai càng lớn thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng lớn.

2. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu đã cho là căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$.

3. Nếu mẫu số liệu được cho bằng bảng phân bố tần số, trong đó n_i là tần số của số liệu x_i thì phương sai được tính theo công thức.

$$s^2 = \frac{1}{N}[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + ... + n_k(x_k - \bar{x})^2] \quad (4)$$

4. Nếu f_i là tần suất của x_i (i = 1, 2,..., k) thì phương sai là

$$s^2 = f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_k - \bar{x})^2$$

5. Nếu mẫu số liệu được cho bằng bảng tần số, tần suất ghép lớp, trong đó c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i (i = 1, 2,..., m) thì phương sai được tính theo công thức

$$s^2 = \frac{1}{N}[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + ... + n_m(c_m - \bar{x})^2] \quad (5)$$

$$= f_1(c_1 - \bar{x})^2 + f_2(c_2 - \bar{x})^2 + ... + f_m(c_m - \bar{x})^2,$$

trong đó f_i là tần suất của lớp thứ i

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 3: Tính phương sai s^2

Phương pháp: Ngoài các công thức (3), (4), (5) áp dụng cho từng trường hợp, ta còn có thể sử dụng công thức sau, do biến đổi công thức (3):

$$s^2 = \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2) - \frac{1}{N^2}(x_1 + x_2 + ... + x_N)^2 \quad (3')$$

hoặc biến đổi công thức (4):

$$s^2 = \frac{1}{N}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + ... + n_kx_k^2) - \frac{1}{N^2}(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k)^2 \quad (4')$$

Ví dụ 3: Thống kê điểm của 150 học sinh trong kì thi học sinh giỏi toán (với thang điểm 20) được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Tần số	1	3	5	8	10	17	29	37	22	13	4	1

Tính phương sai và độ lệch chuẩn

Giải

Vì mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng phân bố tần số, nên ta áp dụng công thức (4')

a) Tính $\frac{1}{N}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + ... + n_{12}x_{12}^2) =$

$= \frac{1}{150}(1\times 9^2 + 3 \times 10^2 + 5 \times 11^2 + 8 \times 12^2 + 10 \times 13^2 + 17 \times 14^2 +$
$29 \times 15^2 + 37 \times 16^2 + 22 \times 17^2 + 13 \times 18^2 + 4 \times 19^2 + 1 \times 20^2)$

$= \frac{35571}{150} = 237,14$

b) Tính $\frac{1}{N^2}(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_{12}x_{12})^2 =$

$= \frac{1}{150^2}(1 \times 9 + 3 \times 10 + 5 \times 11 + 8 \times 12 + 10 \times 13 + 17 \times 14 +$
$29 \times 15 + 37 \times 16 + 22 \times 17 + 13 \times 18 + 4 \times 19 + 1 \times 20)^2$

$= \frac{5239521}{22500} \approx 232,87$

c) Phương sai $s^2 = 273,14 - 232,87 = 4,27$

d) Độ lệch chuẩn $s = \sqrt{4,27} \approx 2,07$

C/ LUYỆN TẬP

BÀI TẬP THỐNG KÊ

5.18. Để điều tra số xe máy trong một gia đình ở một phường A, người ta đã chọn ra 50 gia đình, thống kê số xe máy của gia đình đó thu được mẫu số liệu như sau:

1	2	0	3	1	2	1	3	2	1
4	0	1	2	3	0	1	1	2	0
1	4	3	1	2	1	2	2	2	1

0	1	4	2	2	3	3	2	1	1
1	1	0	1	1	2	4	3	3	2

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì?

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu trong mẫu số liệu trên và tìm tần số, tần suất của chúng

5.19. Khi điều tra về số cây trồng của mỗi lớp trong dịp phát động phong trào Tết trồng cây, người ta thu được bảng số liệu như sau từ 20 lớp trong một trường học.

35	30	28	30	30	30	35	28	30	30
35	50	35	50	30	35	35	30	30	50

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì?

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu trong mẫu số liệu trên và tìm tần số, tần suất của chúng.

5.20. Hàng ngày, một học sinh thử ghi lại thời gian cần thiết để đi từ nhà đến trường và thực hiện điều đó trong 20 ngày. Kết quả thu được mẫu số liệu sau: (đơn vị: phút)

21	19	20	17	18	20	19	18	20	19
17	18	17	20	21	19	19	18	20	18

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì?

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu?

c) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số, tần suất của chúng

5.21. Để điều tra chiều cao của học sinh nữ lớp 10 trong một trường THPT người ta đo chiều cao của 30 học sinh nữ và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị : cm)

151	160	159	152	160	158	157	162	165	164
152	150	150	160	160	152	154	156	156	160
164	162	150	152	165	165	159	157	162	150

Hãy lập bảng tần số – tần suất ghép lớp gồm 8 lớp với các khoảng: [150; 152); [152; 154);...; [164; 166).

5.22. Một nhóm nghiên cứu an toàn giao thông ghi tốc độ (km/giờ) của 40 chiếc xe gắn máy đi qua như sau:

28	21	29	31	36	28	40	41	31	29
41	56	40	20	35	28	52	55	50	47
31	30	35	38	25	57	32	28	40	26
20	50	40	42	30	58	29	31	59	35

Hãy lập bảng tần số – tần suất ghép lớp (chính xác đến phần nghìn) gồm 8 lớp [20; 25); [25; 30);...; [55; 60)

5.23. Thống kê tuổi nghề của 50 giáo viên trong một trường trung học phổ thông người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

8	4	2	32	1	4	25	28	30	31
2	3	25	26	6	15	12	2	21	13
6	2	34	26	5	10	17	20	4	4
25	15	11	10	9	4	5	11	13	10
8	2	30	10	6	7	8	9	3	14

a) Hãy lập bảng tần số – tần suất ghép lớp gồm 7 lớp với các nửa khoảng [1; 5); [5; 10); [10; 15);...; [30; 35)

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột

d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt

5.24. Kết quả của điểm thi môn toán của 30 học sinh được cho trong mẫu số liệu sau:

9	8,5	5,5	6	4,5	6	6,5	5,5	7	8
2	1,5	0,5	1	6	6,5	5	8	9	9,5
6	6,5	5	5,5	3	3,5	6	4	5	5,5

a) Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp, sử dụng năm lớp [0; 2); [2; 4); [4; 6); [6; 8); [8; 10)

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt

5.25. Doanh thu của 20 công ty sản xuất ô tô trong năm vừa qua được cho như sau (đơn vị triệu đô la)

8	32	54	12	50	80	90	64	54	52
20	43	70	56	20	12	7	14	22	35

a) Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp sử dụng 5 lớp [0; 20); [20; 40); [40; 60); [60; 80); [80; 100)

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột

c) Vẽ đường gấp khúc tần số

5.26. Điều tra về số tiền mua sách trong một năm của 50 học sinh trong một trường trung học phổ thông ta có mẫu số liệu sau (đơn vị: nghìn đồng)

104	48	42	54	76	240	150	670	210	140
520	35	80	75	310	450	210	310	120	70
120	810	980	70	215	110	125	128	312	55
640	210	120	70	810	940	215	170	120	150
450	80	140	150	350	245	140	110	750	710

a) Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp gồm 10 lớp: [0; 100); [100; 200);...; [900; 1000).

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt

5.27. Thống kê điểm trắc nghiệm môn tiếng Anh của 40 học sinh, người ta thu được mẫu số liệu sau (thang điểm 100)

56	42	78	45	55	66	82	34	25	30
90	72	98	62	64	31	45	28	72	88
56	58	62	65	31	74	72	90	92	40
52	56	55	82	22	32	46	60	68	54

a) Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp, sử dụng các lớp [20; 30); [30; 40);...; [90; 100)

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột

5.28. Điểm kiểm tra môn Toán của 10 học sinh trong một tổ học tập như sau:

5 4 10 5 5 3 5 6 5 10

a) Tìm số trung bình và số trung vị

b) Số nào làm đại diện cho nhóm tốt hơn?

5.29. Điều tra về tuổi nghề của công nhân trong một phân xưởng người ta thu được mẫu số liệu sau:

20	18	4	5	6	2	6	5	8	5
6	4	5	5	1	15	16	5	5	4

a) Tìm số trung bình và số trung vị

b) Số nào làm đại diện tốt hơn

5.30. Tiền cước phí điện thoại di động một tháng 10 tháng cô giáo trong một trường học được ghi lại như sau (đơn vị nghìn đồng)

75 120 60 120 82

90 92 210 80 120

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn

5.31. Điểm kiểm tra môn thể dục của hai học sinh A và B được ghi lại như sau

A	7	8	6	7	7	9	5	7
B	10	4	9	5	7	3	9	9

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt của mỗi học sinh

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn

c) Học sinh nào có kết quả ổn định hơn

5.32. Số tiền nước phải trả một tháng của 30 hộ trong một Phường được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (đơn vị nghìn đồng)

Lớp	Tần số
[0; 100)	8
[100; 200)	12
[200; 300)	5
[300; 400)	3
[400; 500)	2
	N = 30

Tính độ trung bình và độ lệch chuẩn

5.33. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị nghìn đồng) mà 50 khách hàng mua sắm trong một ngày. Số tiền được ghi trong bảng phân bố tần số sau

Lớp	Tần số
[0; 200)	12
[200; 400)	28
[400;600)	5
[600; 800)	3
[800; 1000)	2
	N = 50

Tính độ trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn

5.34. Trọng lượng của 40 học sinh lớp 10 (đơn vị kg) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Lớp	Tần số
[40; 45)	9
[45; 50)	18
[50; 55)	7
[55; 60)	6
	N = 40

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn

5.35. Một cửa hàng ăn ghi lại số tiền (nghìn đồng) mà mỗi khách hàng trả cho cửa hàng. Các số liệu được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Lớp	Tần số
[0; 100)	25
[100; 200)	70
[200; 300)	60
[300; 400)	30
[400; 500)	15
	N = 200

Tính số bình và độ lệch chuẩn

5.36. Điểm trung bình thi học kì môn Văn và sĩ số của học sinh khối 10, 11 và 12 của một trường thống kê trong bảng sau

	Khối 10	Khối 11	Khối 12
Điểm TB môn Văn	6,4	6,8	7,2
Sĩ số	610	540	520

Tính điểm trung bình của học sinh toàn trường

5.37. Trong một cuộc thi ca nhạc có 5 ca sĩ (mã số 1, 2, 3, 4, 5) vào chung kết, người ta tiến hành thăm dò ý kiến của khán giả. Dưới đây là bảng phân bố tần số theo số phiếu ủng hộ dành cho các ca sĩ trên

Ca sĩ	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	3212	1024	1830	2544	1620	10230

a) Tìm mốt của bảng phân bố tần số đã cho

b) Vẽ biểu đồ cột bảng phân bố tần số của mẫu số liệu thống kê trên

c) Hãy xếp hạng 5 ca sĩ trên theo số phiếu ủng hộ của khán giả.

Chương VI: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

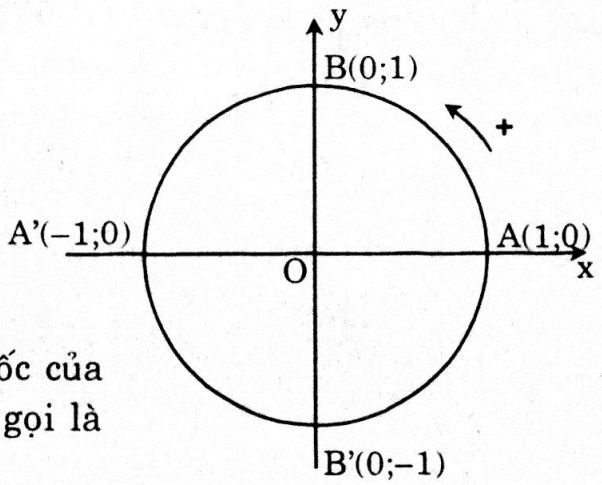
1. Đường tròn định hướng là đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều đương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều đương.

2. Trên đường tròn định hướng cho hai điểm A và B. Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ A đến B (có thể đi qua B một số lần tùy ý) tạo nên một cung lượng giác có điểm đầu A đến điểm cuối B. Kí hiệu cung lượng giác là $\overset{\curvearrowright}{AB}$

3. Mỗi cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$ xác định một góc lượng giác (OA, OB) do tia OM quay xung quanh gốc O từ tia OA tới tia OB khi M chuyển động từ A đến B.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính R = 1. Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại 4 điểm A(1; 0), A'(−1; 0), B(0; 1) và B'(0; −1)

Ta lấy điểm A(1; 0) làm điểm gốc của đường tròn đó. Đường tròn này gọi là đường tròn lượng giác.



5. Quan hệ giữa độ và radian (rad)

$$1^0 = \frac{\pi}{180}\text{rad},\ 1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

Bảng chuyển đổi

Độ	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

6. Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

7. Số đo của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$, kí hiệu là sđ $\overset{\curvearrowright}{AM}$, là một số thực:

$$\text{sđ } \overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k2\pi,$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu A điểm cuối M, còn k là một số nguyên.

Người ta cũng viết số đo bằng độ. Lúc đó ta có:

$$\text{sđ } \overset{\curvearrowright}{AM} = a^0 + k360^0$$

trong đó a^0 là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu A điểm cuối M.

8. Số đo của góc lượng giác (OA, OD) là số đo của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AD}$ tương ứng.

9. Biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, ta sẽ chọn điểm gốc A(1; 0) làm điểm đầu của cung, còn điểm cuối M được xác định bởi hệ thức sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$.

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Đổi số đo độ của các cung lượng giác thành số đo radian và ngược lại.

Phương pháp.

Có thể dùng công thức $1^0 = \frac{\pi}{180}$ rad, 1 rad $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$, với π lấy số gần đúng chữ số thập phân là 3,14, hoặc ba chữ số thập phân là 3,142,... Ngoài ra có thể dùng máy tính bỏ túi (chẳng hạn CASIO fx – 500MS) để đổi từ độ thành radian và ngược lại.

Ví dụ 1.1:

a) Đổi 17^0; $-53^0,30'$ ra radian (lấy ba chữ số thập phân)

b) Đổi $\frac{4}{7}$ rad; – 2,7 rad ra độ.

Giải

a) Ta có: $1^0 = \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx \frac{3,142}{180}\text{rad}$

Vậy $17^0 = \frac{3,142 \times 17}{180} \approx 0,297$ rad

Tương tự:

$$-53^0,30' = \frac{-53,5 \times 3,142}{180} \approx -0,934 \text{ rad.}$$

b) Ta có: 1 rad $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \approx \frac{180}{3,142}^0$

Vậy $\frac{4}{7}$ rad $\approx \frac{4}{7} \times \frac{180}{3,142} \approx 32,736 \approx 32^0 44'10''$.

Tương tự

$$-2,7 \text{ rad} \approx -2,7 \times \frac{180}{3,142} \approx -154,678 \approx -154^0 40'43''.$$

Ví dụ 1.2: Dùng máy tính CASIO fx – 500MS để:

a) Đổi $29^0 37'$ và $-132^0 28'37''$ ra rađian

b) Đổi $\frac{5}{9}$ rad và –4,21 rad ra độ.

Giải

a) Ấn liên tiếp các phím:

[MODE] [MODE] [MODE] trên màn hình hiện ra

Deg	Rad	Gra
1	2	3

Ấn tiếp phím [2] để làm xuất hiện chữ [R] nhỏ phía trên màn hình (nghĩa là rad).

Ấn tiếp các phím

[2] [9] [0'''] [3] [7] [0'''] [SHIFT] [DRG] [1] [=]

ta được kết quả 0. 516908346

Nếu làm tròn đến ba chữ số thập phân được 0,517rad. Tương tự, sau khi nhấn [ON] đưa về số 0 ta nhấn liên tiếp các phím

[(-)] [1] [3] [2] [0'''] [2] [8] [0'''] [3] [7] [0'''] [SHIFT] [DRG] [1] [=]

ta được kết quả – 2.312158864. Làm tròn đến ba chữ số thập

phân được –2,312 rad.

Vậy $29^0 37' = 0{,}517$ rad; $-132^0 28'37'' = -2{,}312$ rad.

b) Để đổi rad ra độ ta cũng bấm 3 lần phím [MODE] rồi ấn phím [1] để xuất hiện chữ [D] nhỏ phía trên màn hình (nghĩa là Degree: độ). Sau đó ấn liên tiếp các phím

[(] [5] [:] [9] [)] [SHIFT] [DRG] [2] [=] [0''']

ta được kết quả $31^0 49'52''$ (làm tròn)

Tương tự ấn liên tiếp các phím

[(-)] [4] [.] [2] [1] [SHIFT] [DRG] [2] [=] [0''']

ta được kết quả $-241^0 12'55''$ (làm tròn)

Vậy $\frac{5}{9}$ rad $= 31^0 49'52''$

$-4{,}21$ rad $= -241^0 12'55''$

VẤN ĐỀ 2: Tính độ dài của cung tròn có số đo α đã cho.

Phương pháp. Để áp dụng công thức $l = R\alpha$, ta cần đổi α thành rad (nếu α cho bằng độ). Đơn vị độ dài của cung là đơn vị độ dài của bán kính R.

Ví dụ 2.1: Một đường tròn có bán kính 30cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo tương ứng là:

a) $\frac{\pi}{7}$; b) 2,3 rad; c) 49^0

Giải

a) Ta có: $l = R\alpha$

$$= 30.\frac{\pi}{7} \approx 30.\frac{3{,}14}{7} \approx 13{,}46$$

Vậy cung có số đo $\frac{\pi}{7}$ có độ dài là 13,46cm.

b) $l = 30 \times 2{,}3 = 69$

Vậy cung có số đo 2,3 rad có độ dài là 69cm.

c) Đổi $49^0 \approx 0{,}86$ rad

Suy ra $l = 30 \times 0{,}86 = 25{,}8$

Vậy cung có số đo 49^0 có độ dài là 25,8cm.

Ví dụ 2.2: Kim giờ và kim phút của một đồng hồ lớn có độ dài lần lượt là 1,65m và 2,25m. Hỏi trong 40 phút đầu kim giờ vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét, đầu kim phút vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét?

Giải

Trong 12 giờ đầu kim giờ vạch một vòng tròn, có số đo là 2π, vậy 1 giờ đầu kim giờ vạch được cung $\frac{\pi}{6}$. Mà 40' = $\frac{2}{3}$ giờ, vậy trong 40' đầu kim giờ vạch được cung tròn có số đo là:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9}$$

Do đó, trong 40 phút đầu kim giờ vạch cung tròn có độ dài là:

$$1{,}65 \times \frac{\pi}{9} \approx 0{,}58 \text{ (m)}$$

Trong 1 giờ đầu kim phút vạch được một vòng tròn, có số đo là 2π, vì vậy trong 40 phút (= $\frac{2}{3}$ giờ), đầu kim phút vạch được cung tròn có số đo là $\frac{4\pi}{3}$. Độ dài của cung tròn đó là:

$$2{,}25 \times \frac{4\pi}{3} \approx 9{,}42\text{(m)}$$

VẤN ĐỀ 3: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác.

Phương pháp. Để biểu diễn một cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, ta sẽ chọn điểm đầu của cung là A(1; 0). Do đó chỉ cần xác định điểm cuối M của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ mà sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$. Tùy theo α âm hay dương, ta sẽ di theo chiều quay của kim đồng hồ hoặc ngược lại, cho tới khi đạt tới điểm M.

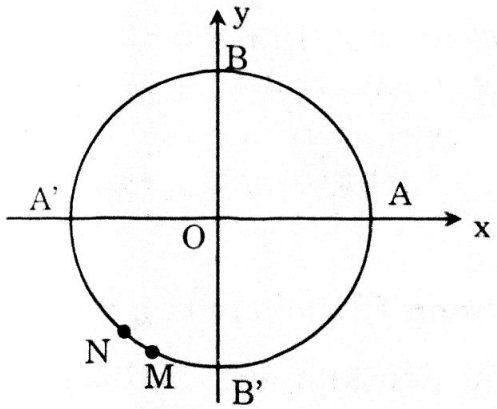
Ví dụ 3: Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo tương ứng là:

a) $-\frac{14\pi}{3}$; b) $\frac{29\pi}{4}$; c) 495^0; d) -600^0.

Giải

Ta tách các số đo thành các bội nguyên của π hoặc của 180^0 để dễ dàng xác định phần dư còn lại ứng với điểm cuối M nào.

a) $-\dfrac{14\pi}{3} = -4\pi - \dfrac{2\pi}{3}$



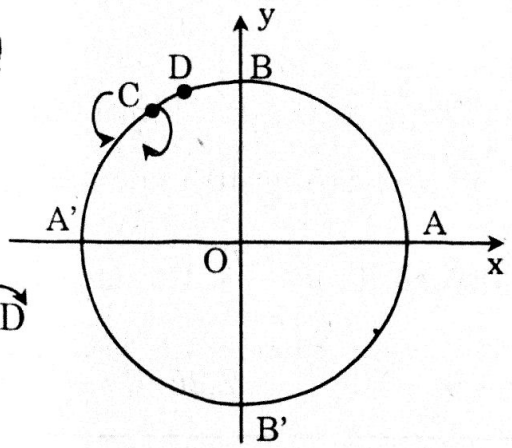
Vậy cung có số đo $-\dfrac{14\pi}{3}$ là cung $\overset{\curvearrowright}{AM}$ ($\overset{\frown}{B'M} = \dfrac{1}{3}\overset{\frown}{B'A'}$)

b) $\dfrac{29\pi}{4} = 7\pi + \dfrac{\pi}{4}$

Vậy cung có số đo $\dfrac{29\pi}{4}$ là cung $\overset{\curvearrowright}{AN}$ ($\overset{\frown}{A'N} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{A'B'}$) do điểm N di động từ A theo chiều dương đi hết ba vòng tròn về A rồi đi tiếp đến A' và đến trung điểm của cung hình học $\overset{\frown}{A'B'}$

c) $495^0 = 360^0 + 135^0$

Vậy cung có số đo 495^0 là cung $\overset{\curvearrowright}{AC}$ (C là trung điểm của cung $\overset{\frown}{A'B}$)



d) $-600^0 = -540^0 - 60^0$

$= -3.\ 180^0 - 60^0$

Vậy cung có số đo -600^0 là cung $\overset{\curvearrowright}{AD}$ ($\overset{\frown}{A'D} = \dfrac{2}{3}\overset{\frown}{A'B}$), do một điểm di động từ A theo chiều kim đồng hồ một lần đến A', lần thứ hai đến A' rồi tiếp đến D.

C/ LUYỆN TẬP

6.1. Đổi số đo của các cung sau đây ra radian:

a) 43^0; b) $-51^045'$; c) $73^015'$; d) $-138^030'$.

6.2. Đổi số đo của các cung sau đây ra độ, phút, giây:

a) $\dfrac{2\pi}{17}$; b) $\dfrac{15\pi}{8}$; c) $-3,1$; d) $\dfrac{8}{9}$.

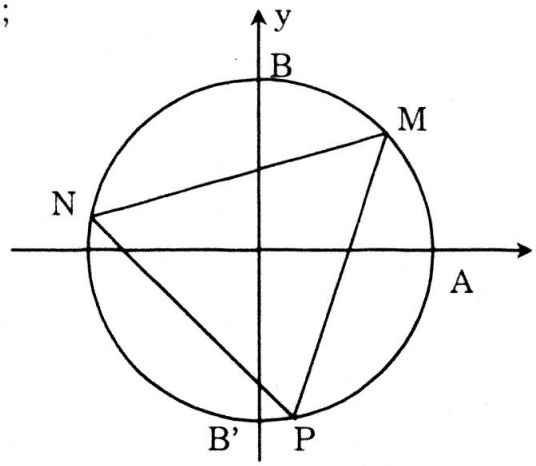
6.3. Dùng máy tính bỏ túi đổi từ độ ra radian và ngược lại:

a) $59^0 28'15''$; b) $-173^0 47'25''$;

c) $\frac{5\pi}{17}$; d) $-\frac{7}{6}$.

6.4. Cho tam giác đều MNP nội tiếp trong đường tròn lượng giác, với đỉnh M là điểm chia đôi cung $\overset{\frown}{AB}$.

Tìm số đo của các cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$, $\overset{\curvearrowright}{AN}$, $\overset{\curvearrowright}{AP}$.



6.5. Một đường tròn có bán kính 50cm. Tìm độ dài của các cung tròn trên đường tròn đó có số đo tương ứng là:

a) $\frac{5\pi}{7}$; b) 3,5; c) 61^0; d) 94^0.

6.6. Một đồng hồ lớn có kim phút dài 1,8m, kim giờ dài 1,3m. Hỏi trong 50' mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét và mũi kim giờ vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét?

6.7. Khi biểu diễn cung lượng giác AM có sđ AM = α và cung lượng giác AN có sđ AN = β trên đường tròn lượng giác thì M và N đối xứng với nhau qua tâm O. Tìm mối liên hệ giữa hai số đo α và β.

6.8. Trên đường tròn lượng giác gốc A, xác định các điểm M khác nhau, biết rằng cung AM có số đo tương ứng là (k là một số nguyên tùy ý):

a) $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{2k\pi}{3}$; c) $\frac{k\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{2} + \pi$.

6.9 Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ AM = α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua đường phân giác của góc $\overset{\frown}{AOB}$. Tìm số đo của cung AM_1.

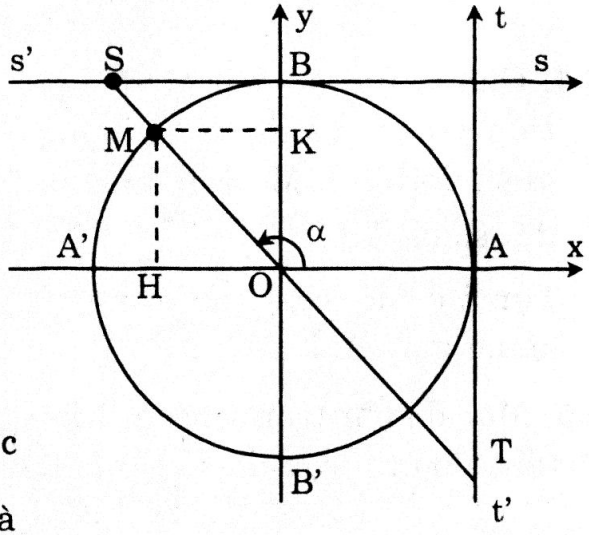
6.10. Tìm cung lượng giác AM có số đo dương nhỏ nhất, biết một cung lượng giác AM có số đo tương ứng là:

a) -120^0; b) 976^0 c) $\frac{17\pi}{3}$; d) $-\frac{25\pi}{7}$.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Trên đường tròn lượng giác cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$. Tung độ $y = \overline{OK}$ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$.



Hoành độ $x = \overline{OH}$ của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$.

Tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (nếu $\cos\alpha \neq 0$) được gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan\alpha$ (hoặc $\text{tg}\alpha$).

Tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (nếu $\sin\alpha \neq 0$) được gọi là côtang của α và kí hiệu là $\cot\alpha$ (hoặc $\text{cotg}\alpha$).

2. Kẻ tiếp tuyến t't với đường tròn lượng giác tại A và tiếp tuyến s's với đường tròn lượng giác tại B; đồng thời coi hai tiếp tuyến này là hai trục, với A là gốc, vectơ đơn vị $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$ trên trục t't, còn B là gốc, vectơ đơn vị $\vec{j} = \overrightarrow{OA}$ trên trục s's.

Kéo dài OM cắt trục t't tại T, cắt trục s's tại S. Thế thì ta có các giá trị lượng giác của α là: $\sin\alpha = \overline{OK}$, $\cos\alpha = \overline{OH}$,

$\tan\alpha = \overline{AT}$, $\cot\alpha = \overline{BS}$.

3. Trục B'y là trục sin, trục A'x là trục côsin, trục t't là trục tang và trục s's là trục côtang.

4. $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và có các tính chất sau:

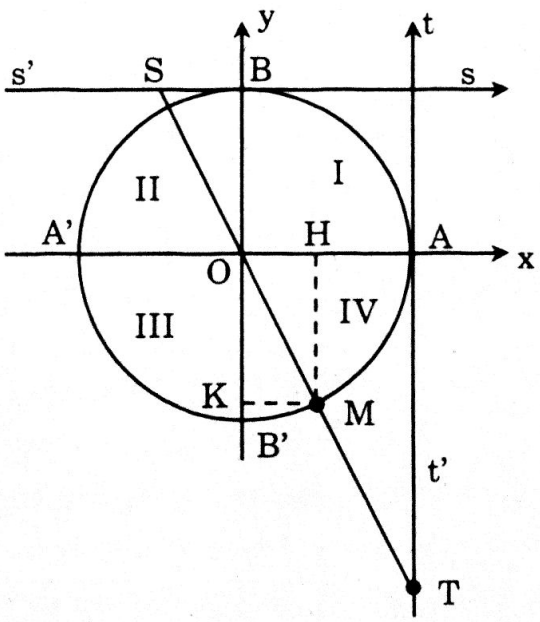
$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha,\ \forall k \in Z$$
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha,\ \forall k \in Z$$
$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$$
$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

5. $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in Z$) và có các tính chất

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\ \forall k \in Z$$
$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\ \forall k \in Z$$

6. Dấu của các giá trị lượng giác của cung α phụ thuộc điểm cuối của cung $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác thuộc phần tư nào.

Giá trị lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−



7. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

8. Công thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$1 + \cot^2\alpha = -\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi$$

$$\tan\alpha.\ \cot\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

9. Giá trị lượng giác của các cung đối nhau.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

10. Giá trị lượng giác của các cung bù nhau.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

11. Giá trị lượng giác của các cung hơn kém π

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

12. Giá trị lượng giác của các cung phụ nhau.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Tính giá trị lượng giác của các cung (góc) đã cho

Phương pháp. Nếu các cung đó có thể đưa về các cung đặc biệt sau khi tách ra một bội nguyên của π thì ta sử dụng các tính chất của giá trị lượng giác của các cung liên quan (đối nhau, bù nhau,...) để tính.

Nếu không đưa về các cung đặc biệt được thì có thể dùng máy tính bỏ túi để tính các giá trị lượng giác.

Ví dụ 1.1: Tính giá trị lượng giác của các cung:

a) $\frac{17\pi}{6}$; b) $-\frac{25\pi}{3}$; c) 1200^0; d) -585^0

Giải

a) Ta có $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

Do đó

$$\sin\frac{17\pi}{6} = \sin\left[2\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{17\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{17\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \cot\frac{17\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

b) $-\frac{25\pi}{3} = -8\pi - \frac{\pi}{3}$

Do đó

$$\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \cot\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $1200^0 = 3 \times 360^0 + 120^0$

Vậy $\sin 1200^0 = \sin(3 \times 360^0 + 120^0) = \sin 120^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 1200^0 = \cos 120^0 = -\dfrac{1}{2}$

$\tan 1200^0 = -\sqrt{3}$, $\cot 1200^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $-585^0 = -720^0 + 135^0$

Vậy $\sin(-585^0) = \sin 135^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(-585^0) = \cos 135^0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(-585^0) = -1$, $\cot(-585^0) = -1$

Ví dụ 1.2: Dùng máy tính bỏ túi tính các giá trị lượng giác của các cung:

a) $-\dfrac{5\pi}{7}$; b) $\dfrac{4\pi}{11}$; c) 51^0; d) -111^0.

Giải

Nếu dùng máy tính CASIO fx – 500 MS ta thực hiện như sau:

a) Nhấn [MODE] ba lần rồi nhấn tiếp

[2] [sin] [(] [(-)] [5] [SHIFT] [π] [÷] [7] [)] [=]

được kết quả –0.781831482. Làm tròn đến hai chữ số thập phân ta được $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{7}\right) = -0{,}78$.

Tiếp theo, nhấn liên tiếp các phím

[cos] [(] [(-)] [5] [SHIFT] [π] [÷] [7] [)] [=]

ta được –0.623489801. Làm tròn đến hai chữ số thập phân ta được $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{7}\right) \approx -0{,}62$.

Đối với giá trị $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{7}\right)$ ta cũng nhấn tương tự, chỉ [cos] bởi [tan], được

$\tan\left(-\frac{5\pi}{7}\right) \approx 1,25$ (đã làm tròn)

Trong máy tính không có giá trị côtang. Vì vậy muốn tính $\cot\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$ ta thực hiện như sau:

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{\tan\left(-\frac{5\pi}{7}\right)} = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

(Chú ý rằng trong máy tính có phím $\tan^{-1}$, nhưng không phải là $\frac{1}{\tan}$)

b) Nhấn tương tự trong câu a ta được

$$\sin\frac{4\pi}{11} \approx 0,91,\ \cos\frac{4\pi}{11} \approx 0,42,\ \tan\frac{4\pi}{11} \approx 2,19$$

$$\cot\frac{4\pi}{11} = \frac{1}{\tan\frac{4\pi}{11}} = \frac{1}{2,19} \approx 0,46$$

c) Nhấn phím [MODE] ba lần rồi nhấn [1] để xuất hiện chữ [D] nhỏ trên màn hình. Sau đó nhấn liên tiếp

[sin] [5] [1] [0'''] [=] được 0,777145961

Vậy $\sin 51^0 \approx 0,78$(đã làm tròn).

Tương tự ta tính được $\cos 51^0 \approx 0,63$; $\tan 51^0 \approx 1,23$.

Còn $\cot 51^0 \approx \frac{1}{\tan 51^0} = \frac{1}{1,23} = 0,81$

d) Làm tương tự câu c ta

[sin] [(-)] [1] [1] [1] [0'''] [=] được −0,933588426

Vậy $\sin(-111^0) \approx -0,93$

Tương tự, ta tính được

$\cos(-111^0) \approx -0,36$, $\tan(-111^0) \approx 2,61$

$$\cot(-111^0) = \frac{1}{\tan(-111^0)} = \frac{1}{2,61} \approx 0,38.$$

VẤN ĐỀ 2: Xác định dấu của giá trị lượng giác của một cung (góc) lượng giác.

Phương pháp. Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung lượng giác, ta cần biết điểm cuối của cung đó nằm ở phần tư nào trên một đường tròn lượng giác, rồi sử dụng bảng xét dấu đã nêu ở trên.

Ví dụ 2.1: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin(\alpha + \pi)$; b) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$;

c) $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$; d) $\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$.

Giải

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha + \pi < 2\pi$

Vậy điểm cuối của cung $\alpha + \pi$ nằm trong phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác. Suy ra

$$\sin(\alpha + \pi) < 0$$

b) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow -\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \alpha < 0$$

Vậy điểm cuối của cung $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nằm trong phần tư thứ IV, do đó

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) > 0$$

c) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \alpha + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$

Vậy điểm cuối của cung $\alpha + \frac{\pi}{2}$ nằm trong phần tư thứ III, nên

$\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) > 0$

d) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow -\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \pi$$

Vậy điểm cuối của cung $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ nằm trong phần tư thứ II, nên

$\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) < 0$

Ví dụ 2.2: Tính các giá trị lượng giác của góc α trong các trường hợp sau:

a) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; d) $\cot\alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Giải

a) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\cos\alpha > 0$. Ta có:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. Do đó

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}; \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}.$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{3}{4}$$

b) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$. Ta có:

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$. Do đó

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}; \qquad \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \qquad \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

c) Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha > 0$. Ta có:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{7}{9}} = \frac{9}{16}$$

Vậy:

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}; \quad \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

d) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0$. Ta có:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \cot\alpha.\ \sin\alpha = -\frac{4}{5}; \quad \tan\alpha = -\frac{3}{4}.$$

VẤN ĐỀ 3: Tính các biểu thức của các giá trị lượng giác dựa trên các công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.

Phương pháp. Sử dụng công thức liên hệ giữa giá trị lượng giác của các cung đối nhau, phụ nhau, bù nhau,...để biến đổi các biểu thức, rút gọn chúng và tính giá trị của chúng.

Ví dụ 3.1: Chứng minh rằng

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0.$$

Giải

Sử dụng công thức về giá trị lượng giác của các cung bù nhau, ta có

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

Cho α lần lượt lấy giá trị $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$

Ta được:

$$\cos\frac{8\pi}{9} = -\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9} = -\cos\frac{2\pi}{9}, \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3},$$

$$\cos\frac{5\pi}{9} = -\cos\frac{4\pi}{9}$$

Các số hạng khử nhau từng đôi một nên tổng đã cho bằng 0

Ví dụ 3.2: Tính tổng

$$A = \sin^2 20^0 + \sin^2 30^0 + \sin^2 40^0 + \sin^2 50^0 + \sin^2 60^0 + \sin^2 70^0$$

Giải

Áp dụng công thức giá trị lượng giác của các cung phụ nhau ($\sin(90^0 - a^0) = \cos a^0$) và công thức $\sin^2 a^0 + \cos^2 a^0 = 1$, ta được:

$$\sin^2 20^0 = \sin^2(90^0 - 70^0) = \cos^2 70^0,$$

$$\sin^2 30^0 = \sin^2(90^0 - 60^0) = \cos^2 60^0,$$

$$\sin^2 40^0 = \sin^2(90^0 - 50^0) = \cos^2 50^0.$$

Vậy $A = (\cos^2 70^0 + \sin^2 70^0) + (\cos^2 60^0 + \sin^2 60^0) + (\cos^2 50^0 + \sin^2 50^0) = 3$.

VẤN ĐỀ 4: Chứng minh các công thức lượng giác đơn giản.

Phương pháp. Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản và các công thức về giá trị lượng giác của các cung liên quan đặc biệt (đối nhau, bù nhau,...) để biến đổi cho hai vế của công thức ta cần chứng minh trùng nhau.

Ví dụ 4.1: Chứng minh các công thức:

a) $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$; b) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Giải

a) Ta có: $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Vậy vế trái và vế phải bằng nhau.

b) Ta biến đổi công thức cần chứng minh:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha - (1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0$$

Vậy ta đã chứng minh được công thức đã nêu.

Ví dụ 4.2: Chứng minh rằng

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$; b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$;

c) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$; d) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$.

Giải

Biến đổi về các cung phụ nhau:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

c) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$

d) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$.

C/ LUYỆN TẬP

6.11. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không? Nếu có thì điểm cuối của cung α nằm ở phần tư nào trên đường tròn lượng giác?

a) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ và $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos\alpha = \frac{3}{4}$;

c) $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$ và $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$;

d) $\cot\alpha = -\frac{4}{3}$ và $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$;

6.12. Tính các giá trị lượng giác của các cung sau bằng cách đưa về cung đặc biệt:

a) $-\frac{23\pi}{6}$; b) $\frac{11\pi}{3}$; c) 330^0; d) -675^0.

6.13. Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị lượng giác của các cung sau đây:

a) $\frac{2\pi}{13}$; b) $-\frac{3\pi}{17}$; c) 123^0; d) -219^0;

6.14. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})$; b) $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2})$;

c) $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$; d) $\cot(\pi - \alpha)$.

6.15. Tính các giá trị lượng giác của các cung α trong các trường hợp sau:

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$;

b) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$;

c) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\tan\alpha = \frac{5}{4}$;

d) $\pi < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\cot\alpha = \frac{5}{2}$.

6.16. Tính các biểu thức:

a) $A = \cos40^0 + \cos50^0 + \cos60^0 - \sin40^0 - \sin50^0 - \sin60^0$;

b) $B = \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5}$;

c) $C = \cos^220^0 + \cos^230^0 + \cos^240^0 + \cos^250^0 + \cos^260^0 + \cos^270^0$;

d) $D = \sin50^0 + \sin80^0 + \sin110^0 + \cos140^0 + \cos170^0 + \cos200^0$.

6.17. Chứng minh rằng

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 0$;

c) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = 0$;

d) $\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

6.18. Chứng minh các công thức:

a) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha . \sin^2\alpha$;

b) $\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} + \dfrac{1}{1+\cot^2\alpha} = 1$;

c) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$;

d) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0$.

6.19. Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. Hãy tính:

a) $\sin\alpha . \cos\alpha$;

b) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;

c) $\tan\alpha + \cot\alpha$;

d) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$.

6.20. Biết $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

b) $\dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$;

c) $\dfrac{1+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$;

d) $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{1+\sin^2\alpha}$.

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Công thức cộng

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a . \tan b}$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

3. Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos u + \cos v = 2\cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2\sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}$$

B/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: Sử dụng các công thức lượng giác để tính giác trị lượng giác của các cung.

Phương pháp: Nếu ta biến đổi các cung về dạng tổng hoặc hiệu của hai cung đặc biệt thì có thể áp dụng công thức cộng để tính giá trị lượng giác của chúng.

Ví dụ 1.1: Không dùng máy tính, hãy tính các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin\frac{\pi}{12}$; b) $\cos 75^0$; c) $\tan 105^0$.

Giải

a) Ta có

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

b) $\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) = \cos 45^0.\cos 30^0 - \sin 45^0.\sin 30^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

c) $\tan 105^0 = \tan(60^0 + 45^0) = \dfrac{\tan 60^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 60^0.\tan 45^0} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

Ví dụ 1.2: Không dùng máy tính, hãy tính các biểu thức sau:

a) $\dfrac{\tan 28^0 + \tan 32^0}{1 - \tan 28^0.\tan 32^0}$; b) $\dfrac{\tan\frac{5\pi}{16} - \tan\frac{\pi}{16}}{1 + \tan\frac{5\pi}{16}.\tan\frac{\pi}{16}}$

Giải

a) Ta có

$$\sqrt{3} = \tan 60^0 = \tan(28^0 + 32^0) = \frac{\tan 28^0 + \tan 32^0}{1 - \tan 28^0.\tan 32^0}$$

Vậy biểu thức đã cho bằng $\sqrt{3}$.

b) $\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{16}$. Vì vậy

$$\frac{\tan\frac{5\pi}{16} - \tan\frac{\pi}{16}}{1 + \tan\frac{5\pi}{16}.\tan\frac{\pi}{16}} = \tan\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

VẤN ĐỀ 2: Tính sin3α, cos3α theo sinα và cosα. Áp dụng.

Phương pháp: Biến đổi 3α = 2α + α rồi áp dụng công thức cộng và công thức nhân đôi.

Ví dụ 2.1: Chứng ming rằng

a) $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

b) $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

c) $\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

Giải

a) $\sin3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

b) $\cos3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos2\alpha\cos\alpha - \sin2\alpha\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

c) $\tan3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan2\alpha.\tan\alpha}$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \frac{2\tan^2\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

Ví dụ 2.2: Chứng ming rằng

$$\cos3\alpha\sin^3\alpha + \sin3\alpha\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\sin4\alpha$$

Giải

Ta có: $4(\cos3\alpha \sin^3\alpha + \sin3\alpha \cos^3\alpha)$

$= \cos3\alpha.4\sin^3\alpha + \sin3\alpha.4\cos^3\alpha$

$= \cos3\alpha(3\sin\alpha - \sin3\alpha) + \sin3\alpha(3\cos\alpha + \cos3\alpha)$

$= 3(\sin\alpha \cos3\alpha + \cos\alpha \sin3\alpha)$

$= 3.\sin(\alpha + 3\alpha) = 3.\sin4\alpha.$

Vậy đẳng thức được chứng minh

Ví dụ 2.3: Chứng minh rằng

a) $\sin18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; b) $\cos18^0 = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;

c) $\sin36^0 = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Giải

a) Ta có: $90^0 = 5 \times 18^0 = 3.18^0 + 2.18^0$

Hai góc 3.18^0 và 2.18^0 phụ nhau nên

$$\sin(3.18^0) = \cos(2.18^0)$$

Áp dụng công thức $\sin3\alpha$ và $\cos2\alpha$

$$\sin(3.18^0) = 3\sin18^0 - 4\sin^3 18^0$$

$$\cos(2.18^0) = 1 - 2\sin^2 18^0$$

Ta được đẳng thức

$$3\sin18^0 - 4\sin^3 18^0 = 1 - 2\sin^2 18^0$$

Vậy $\sin 18^0$ là nghiệm của phương trình

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Phương trình này có tổng các hệ số bằng 0 vì vậy ta phân tích được:

$$(x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

Vì $\sin18^0 \neq 1$ nên $\sin18^0$ là nghiệm của nhân tử thứ hai

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

Suy ra $\sin18^0 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

Vì $\sin18^0 > 0$ nên giá trị $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ bị loại

Vậy ta được $\sin18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

b) Vì $\cos 18^0 > 0$ nên

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18^0}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

c) $\cos 36^0 = 2\cos^2 18^0 - 1 = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

Do đó

$$\sin 36^0 = \sqrt{1 - \cos^2 36^0} = \sqrt{1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

VẤN ĐỀ 3: Biểu diễn $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ theo $\tan\alpha$ và áp dụng.

Phương pháp: Sử dụng các công thức nhân đôi đối với $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ rồi đặt $\cos^2\alpha$ làm thừa số và biến đổi $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}$

Ví dụ 3.1: Chứng minh rằng:

a) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$;

b) $\frac{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}{(1 + \tan^2\alpha)^2} = \sin 4\alpha$;

c) $\frac{\tan 2\alpha}{\tan 4\alpha - \tan 2\alpha} = \cos 4\alpha$.

Giải

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha\left(\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

b) $\frac{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}{(1 + \tan^2\alpha)^2} = \frac{4\tan\alpha(1 - \tan^2\alpha)}{(1 + \tan^2\alpha)^2}$

$= \frac{4\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \cdot \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

$= 2\sin 2\alpha.\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

c) $\dfrac{\tan 2\alpha}{\tan 4\alpha - \tan 2\alpha} = \dfrac{\tan 2\alpha}{\dfrac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} - \tan 2\alpha} = \dfrac{1-\tan^2 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha} = \cos 4\alpha.$

Ví dụ 3.2: Biết $\tan\alpha = -\dfrac{1}{3}$, tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Giải

Áp dụng công thức trong ví dụ 3.1

Ta có: $\sin 2\alpha = \dfrac{-\dfrac{2}{3}}{1+\dfrac{1}{9}} = -\dfrac{3}{5}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\dfrac{1}{9}}{1+\dfrac{1}{9}} = \dfrac{4}{5}$,

$\tan 2\alpha = \dfrac{-\dfrac{3}{5}}{\dfrac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}.$

VẤN ĐỀ 4: Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để chứng minh và tính các biểu thức lượng giác.

Phương pháp: Gom các hạng tử trong công thức thành dạng sina + sinb, cosa + cosb, sina – sinb, ... để biến đổi thành tích.

Ví dụ 4.1: Chứng minh các công thức

a) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$

$= 4\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b+c}{2}\sin\dfrac{c+a}{2};$

b) $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$

$= 4\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{b+c}{2}\cos\dfrac{c+a}{2}.$

Giải

a) $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$

$= (\sin a + \sin b) + [\sin c - \sin(a+b+c)]$

$= 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} + 2\cos\dfrac{a+b+2c}{2}\sin\dfrac{-(a+b)}{2}$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b+2c}{2}\right]$$

$$= -4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{-b-c}{2}$$

$$= 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}.$$

b) $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\cos\frac{a+b+2c}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b+2c}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}.$$

Ví dụ 4.2: Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos24^0 + \cos28^0 + \cos32^0 + \cos36^0) -$$

$$- (\sin24^0 + \sin28^0 + \sin32^0 + \sin36^0).$$

Giải

Ta có $\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos24^0 + \cos28^0 + \cos32^0 + \cos36^0) =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}[(\cos24^0 + \cos36^0) + (\cos28^0 + \cos32^0)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}(2\cos30^0.\cos6^0 + 2\cos30^0.\cos2^0)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}2\cos30^0\,(\cos6^0 + \cos2^0) = \cos6^0 + \cos2^0$$

$\sin24^0 + \sin28^0 + \sin32^0 + \sin36^0 =$

$= (\sin24^0 + \sin36^0) + (\sin28^0 + \sin32^0)$

$= 2\sin30^0.\cos6^0 + 2\sin30^0.\cos2^0$

$= 2\sin30^0(\cos6^0 + \cos2^0) = \cos6^0 + \cos2^0$

Vậy ta được $A = 0$

VẤN ĐỀ 5: Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng để chứng minh, rút gọn và tính các biểu thức lượng giác.

Phương pháp: Ta lựa chọn các tích để khi biến đổi chúng thành tổng thì các hạng tử có thể khử lẫn nhau để được một biểu thức đơn giản hơn.

Ví dụ 5.1: Chứng minh các biểu thức:

a) $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$;

b) $\cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$;

c) $\sin 5\alpha - 2\sin\alpha(\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) = \sin\alpha$.

Giải

Ta có:

a) $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1}{2}\sin\alpha\left[\cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{2}\sin\alpha.\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha$

$= \frac{1}{4}(\sin(-\alpha) + \sin 3\alpha) + \frac{1}{4}\sin\alpha = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

b) $\cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha\left(\cos 2\alpha + \cos\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\cos\alpha.\cos 2\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha$

$= \frac{1}{4}(\cos(-\alpha) + \cos 3\alpha) - \frac{1}{4}\cos\alpha = \frac{1}{4}\cos 3\alpha.$

c) $\sin 5\alpha - 2\sin\alpha(\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) =$

$= \sin 5\alpha - 2\sin\alpha.\cos 4\alpha - 2\sin\alpha.\cos 2\alpha$

$= \sin 5\alpha - (\sin 5\alpha - \sin 3\alpha) - (\sin 3\alpha - \sin\alpha)$

$= \sin\alpha.$

Ví dụ 5.2: Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = \sin 10^0 \sin 30^0 \sin 50^0 \sin 70^0$;

b) $B = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$.

Giải

a) $A = \sin10^0 \sin30^0 \sin50^0 \sin70^0 =$

$= \frac{1}{2}\sin10^0(\sin50^0.\sin70^0)$

$= \frac{1}{4}\sin10^0(\cos20^0 - \cos120^0)$

$= \frac{1}{4}\sin10^0\cos20^0 + \frac{1}{8}\sin10^0$

$= \frac{1}{8}[\sin(-10^0) + \sin30^0] + \frac{1}{8}\sin10^0$

$= \frac{1}{8}\sin30^0 = \frac{1}{16}$

b) $B = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\right)$

$= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{9}(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{12\pi}{9})$

$= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} - \frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{9}$

$= \frac{1}{8}\left[\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9}\right] - \frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{9}$

$= \frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{16}$

VẤN ĐỀ 6: Sử dụng tổng hợp các công thức lượng giác để biến đổi các biểu thức lượng giác.

Phương pháp: Tùy theo từng bài toán để lựa chọn các công thức lượng giác cần thiết, hoặc kết hợp nhiều công thức để đi đến kết quả.

Ví dụ 6.1: Rút gọn biểu thức

$$\sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) + 4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}.$$

Giải

Ta biến đổi

$A = [\sin(a-b) + \sin(b-c)] + \sin(c-a)$

$$= 2\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{a-2b+c}{2} - \sin(a-c)$$

$$= 2\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{a-2b+c}{2} - 2\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{a-c}{2}$$

$$= 2\sin\frac{a-c}{2}\left[\cos\frac{a-2b+c}{2} - \cos\frac{a-c}{2}\right]$$

$$= -4\sin\frac{a-c}{2}\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{c-b}{2}$$

$$= -4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}.$$

Vậy tổng đã cho bằng 0.

Ví dụ 6.2: Cho tam giác ABC, Chứng ming rằng:

a) $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

Giải

a) Trước hết trong tam giác ABC ta có:

$$A + B + C = \pi \Rightarrow A + C = \pi - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin(A+C) = \sin B\\ \cos(A+C) = -\cos B\end{cases}$$

Bầy giờ ta biến đổi vế trái của câu a

$$\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A$$

$$= \frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B} + \frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C} + \frac{\cos C\cos A}{\sin C\sin A}$$

$$= \frac{\cos A\cos B\sin C + \cos B\cos C\sin A + \cos C\cos A\sin B}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\cos B(\cos A\sin C + \cos C\sin A) + \cos C\cos A\sin B}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\cos B\sin(A+C) + \cos C\cos A\sin B}{\sin A\sin B\sin C} = \frac{\sin B(\cos B + \cos C\cos A)}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\cos B\sin B + \cos C\cos A\sin B}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin A \sin C}$$

$$= \frac{-\cos(A + C) + \cos C \cos A}{\sin A \sin C}$$

$$= \frac{-\cos A \cos C + \sin A \sin C + \cos C \cos A}{\sin A \sin C}$$

$$= \frac{\sin A \sin C}{\sin A \sin C} = 1.$$

Sau đây là một cách chứng minh khác của câu a).

Ta có:

$$0 = \sin(A + B + C) = \sin(A + B)\cos C + \cos(A + B)\sin C =$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)\cos C + (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\sin C$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$$

Suy ra:

$$\sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C = \sin A \sin B \sin C$$

Chia cả hai vế cho sinA sinB sinC (tích này $\neq 0$)

Ta được

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

b) Vì $A + B + C = \pi$ nên $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

Do đó $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

Từ đó suy ra

$$\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

Ta có: $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

Nhân chéo ta được

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

C/ LUYỆN TẬP

6.21. Không dùng máy tính, hãy tính các giá trị lượng giác sau:

a) $\cot\frac{7\pi}{12}$; b) $\cos\frac{5\pi}{12}$; c) $\tan 15^0$; d) $\sin\frac{\pi}{8}$

6.22. Cho $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = -\frac{3}{5}$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Tính $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin((\alpha - \beta)$.

6.23. Cho tam giác ABC có $\sin A = \frac{24}{25}$, $\sin B = \frac{5}{13}$. Tính cosC. Giá trị cosC có duy nhất không?

6.24. Cho $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau:

a) $\frac{2\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$; b) $\frac{\sin 2\alpha}{3 - 2\cos\alpha}$

c) $\frac{\tan 2\alpha + \sin 2\alpha}{\tan 2\alpha - \sin 2\alpha}$; d) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\alpha}$

6.25. Cho $\pi < \alpha < 2\pi$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1 + \cos\alpha} + \sqrt{1 - \cos\alpha} = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

6.26. Không dùng máy tính, hãy tính các biểu thức:

a) $\cos 25^0 - \cos 35^0 + \cos 45^0 - \cos 85^0$;

b) $\cos 30^0 + \cos 50^0 + \cos 70^0 + \cos 90^0 + \cos 110^0 + \cos 130^0$;

c) $\frac{\sin 20^0 - \sin 50^0 - \sin 70^0}{\cos 10^0.\cos 25^0.\cos 35^0}$;

d) $\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{12} + 2\sin\frac{\pi}{60}\sin\frac{11\pi}{60}$

6.27. Cho biểu thức

$$A = \cos 20^0.\cos 40^0.\cos 80^0$$

Bằng cách nhân A với $\sin 20^0$ rồi áp dụng công thức nhân đôi, chứng minh rằng: $A = \frac{1}{8}$.

6.28. Cho biểu thức

$$B = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}.$$

Bằng cách nhân B với $2\cos\frac{\pi}{14}$ rồi áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng, chứng minh rằng $B = \frac{1}{2}$.

6.29. Chứng minh các đẳng thức

a) $\cos 5\alpha + 3\cos 7\alpha + 3\cos 9\alpha + \cos 11\alpha = 8\cos 8\alpha.\cos^3\alpha$;

b) $\dfrac{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha} = \dfrac{\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)}$;

c) $\dfrac{\sqrt{2} + 2\cos\alpha}{\sqrt{2} - 2\cos\alpha} = \cot\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right).\cot\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)$;

d) $\cot\alpha - \cot 2\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$.

6.30. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

b) $\sin A.\cos(B - C) = \sin B\cos B + \sin C\cos C$;

c) $\sin A.\sin(B - C) = \sin^2 B - \sin^2 C$;

d) Nếu a, b, c là các cạnh của tam giác ABC đối diện lần lượt với các góc A, B, C và ta định nghĩa ba góc α, β, δ bởi các hệ thức

$$\cos\alpha = \frac{a}{b+c},\ \cos\beta = \frac{b}{c+a},\ \cos\delta = \frac{c}{a+b}$$

thì

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\delta}{2} = 1.$$

MỤC LỤC

CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP **5**
§1. Mệnh đề và áp dụng 5
§2. Tập hợp 15
CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI **27**
§1. Đại cương về hàm số 27
§2. Hàm số bậc nhất 37
§3. Hàm số bậc hai 48
CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH **57**
§1. Đại cương về phương trình 57
§2 Phương trình quy về phương trình bậc nhất, bậc hai 63
§3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và ba ẩn 76
§4. Hệ phương trình bậc hai một ẩn và hai ẩn 87
CHƯƠNG IV: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.98
§1. Bất đẳng thức 98
§2. Đại cương về bất phương trình 110
§3. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn 113
§4. Dấu nhị thức bậc nhất 120
§5. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn. 126
§6. Dấu của tam thức bậc hai 131
§7. Bất phương trình bậc hai 136
§8. Một số phương trình và bất phương trình quy về bậc hai 141
CHƯƠNG V: THỐNG KÊ **154**
§1. Trình bày số liệu 154
§2. Các số đặc trưng đại diện cho các số liệu thống kê. 174
§3. Các số đặc trưng chỉ độ phân tán của các số liệu 178
CHƯƠNG VI: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC **187**
§1. Cung và góc lượng giác 187
§2. Giá trị lượng giác của một cung 194
§3. Công thức lượng giác 206

MỤC LỤC **220**